ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 3 câu/4 trang)

ĐỀ KIỂM TRA THƯỜNG XUYÊN 1
Môn: Toán rời rạc (MAT3500 2, 2023-2024)
Thời gian: 30 phút

- Nếu tổng điểm lớn hơn 10 thì tính là 10 điểm.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Có thể sử dụng tài liệu (sách, bài giảng, vở ghi chép). Không sử dụng các thiết bị điện tử như điện thoại thông minh, máy tính xách tay, v.v... Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	3	Tổng
Điểm tối đa:	5	5	5	15
Điểm:				

1. Ở mức độ nào đó, chúng ta có thể coi một *cơ sở dữ liệu (database)* như là một bảng với các hàng tương ứng với các *cá thể (individual entity)* nào đó và các cột tương ứng với các *trường (field)* mô tả dữ liệu liên quan đến các cá thể. Một *truy vấn cơ sở dữ liệu (database query)* có thể xem như là một vị từ $Q(x)$ có chứa các điều kiện để kiểm tra các giá trị từ các cột và các toán tử lôgic liên kết các điều kiện này. Khi một truy vấn cơ sở dữ liệu được đưa vào, *hệ quản trị cơ sở dữ liệu (database management system)* sẽ trả lại một danh sách các hàng (ứng với các thực thể) trong cơ sở dữ liệu thỏa mãn điều kiện đề ra trong truy vấn. Chúng ta có thể nghĩ về hình thức truy cập cơ sở dữ liệu này từ góc nhìn của lôgic vị từ: để phản hồi truy vấn (query) Q, hệ thống trả lại một danh sách các hàng, trong đó mỗi hàng x thỏa mãn điều kiện $Q(x)$ đúng. Bảng 1 đưa ra một ví dụ về cơ sở dữ liệu và phương thức truy vấn.

name	**GPA**	**CS taken?**	**home**	**age**	**school year**	**on campus?**	**has a major?**
Alice	4.0	yes	Alberta	20	3	yes	yes
Bob	3.14	yes	Bermuda	19	3	yes	no
Charlie	3.54	no	Cornwall	18	1	no	yes
Desdemona	3.8	yes	Delaware	17	2	no	no

Bảng 1: Ví dụ một cơ sở dữ liệu. Nếu muốn tìm danh sách tất cả các sinh viên có GPA (grade point averages - điểm trung bình) tối thiểu 3.4 và nếu đã học ít nhất một khóa học về khoa học máy tính (computer science - CS) thì phải đến từ Hawaii, ta có thể truy vấn $[\mathit{GPA}(x) \geq 3.4] \wedge [\mathit{takenCS}(x) \rightarrow (\mathit{home}(x) = \text{Hawaii})]$. Kết quả trả lại với cơ sở dữ liệu này là Charlie.

Mỗi vị từ $Q(x)$ sau đây được sử dụng để mô tả các điều kiện kiểm tra các cột cụ thể ứng với hàng x. Trong mỗi trường hợp, hãy tìm một vị từ $P(x)$ tương đương lôgic với $Q(x)$ (nghĩa là $\forall x\, P(x) \equiv \forall x\, Q(x)$) sao cho *trong $P(x)$ mỗi tên cột chỉ xuất hiện nhiều nhất một lần.* Bạn có thể tùy ý sử dụng các ký hiệu $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$, và các toán tử lôgic $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$, nếu cần. Hãy chứng minh rằng vị từ $P(x)$ mà bạn tìm được thực sự tương đương lôgic với vị từ $Q(x)$ ban đầu.

(a) (2 điểm) $(age(x) < 18) \vee [(age(x) \geq 18) \wedge (GPA(x) \geq 3.0)]$.

(b) (3 điểm) $takenCS(x) \rightarrow \neg[(home(x) = \text{Hawaii}) \rightarrow ((home(x) = \text{Hawaii}) \wedge takenCS(x))]$.

Lời giải:

(a) Với giá trị x cụ thể nào đó, ta có

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= (age(x) < 18) \vee [(age(x) \geq 18) \wedge (GPA(x) \geq 3.0)] \\
&\equiv [(age(x) < 18) \vee (age(x) \geq 18)] \wedge [(age(x) < 18) \vee (GPA(x) \geq 3.0)] && \text{Luật phân phối} \\
&\equiv [(age(x) < 18) \vee \neg(age(x) < 18)] \wedge [(age(x) < 18) \vee (GPA(x) \geq 3.0)] \\
&\equiv \mathbf{T} \wedge [(age(x) < 18) \vee (GPA(x) \geq 3.0)] && \text{Luật phủ định} \\
&\equiv [(age(x) < 18) \vee (GPA(x) \geq 3.0)] \wedge \mathbf{T} && \text{Luật giao hoán} \\
&\equiv (age(x) < 18) \vee (GPA(x) \geq 3.0) && \text{Luật đồng nhất}
\end{aligned}
$$

Do đó, ta chọn $P(x) = (age(x) < 18) \vee (GPA(x) \geq 3.0)$.

(b) Với giá trị x cụ thể nào đó, đặt $A = takenCS(x)$ và $B = (home(x) = \text{Hawaii})$. Ta có

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= takenCS(x) \rightarrow \neg[(home(x) = \text{Hawaii}) \rightarrow ((home(x) = \text{Hawaii}) \wedge takenCS(x))] \\
&= A \rightarrow \neg(B \rightarrow (B \wedge A)) \\
&\equiv A \rightarrow \neg(B \rightarrow (A \wedge B)) && \text{Luật giao hoán} \\
&\equiv A \rightarrow \neg(\neg B \vee (A \wedge B)) && p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \\
&\equiv A \rightarrow (\neg(\neg B) \wedge \neg(A \wedge B)) && \text{Luật De Morgan} \\
&\equiv A \rightarrow (B \wedge \neg(A \wedge B)) && \text{Luật phủ định kép} \\
&\equiv A \rightarrow ((B \wedge (\neg A \vee \neg B)) && \text{Luật De Morgan} \\
&\equiv A \rightarrow ((B \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B)) && \text{Luật phân phối} \\
&\equiv A \rightarrow ((B \wedge \neg A) \vee \mathbf{F}) && \text{Luật phủ định} \\
&\equiv A \rightarrow (B \wedge \neg A) && \text{Luật đồng nhất} \\
&\equiv \neg A \vee (B \wedge \neg A) && p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q \\
&\equiv \neg A \vee (\neg A \wedge B) && \text{Luật giao hoán} \\
&\equiv \neg A && \text{Luật hấp thụ}
\end{aligned}
$$

Do đó, ta chọn $P(x) = \neg takenCS(x)$.

2. (5 điểm) Chứng minh hoặc đưa ra phản ví dụ cho mệnh đề sau:

Với mọi số nguyên dương n, n lẻ khi và chỉ khi $5n + 6$ lẻ.

Lời giải: Với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta chứng minh hai điều:

(a) Nếu n lẻ, thì $5n + 6$ lẻ.

(b) Nếu $5n + 6$ lẻ, thì n lẻ.

Cụ thể, ta có:

(a) Giả sử n lẻ. Ta chứng minh $5n + 6$ lẻ. Do $n \in \mathbb{Z}^+$ và n lẻ, $n = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}^+$. Do đó, $5n+6 = 5(2k+1)+6 = 2(5k+5)+1$. Do $5n+6 = 2j+1$ với $j = 5k+5 \in \mathbb{Z}^+$, ta có $5n+6$ là một số lẻ.

(b) Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $5n + 6$ lẻ và n chẵn. Do $n \in \mathbb{Z}^+$ và n chẵn, $n = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$. Do đó, $5n + 6 = 5(2k) + 6 = 2(5k + 3)$. Do $5n + 6 = 2j$ với $j = 5k + 3 \in \mathbb{Z}^+$, ta có $5n + 6$ là một số chẵn, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

3. *Tập lũy thừa* $\mathcal{P}(A)$ của một tập hợp A là tập hợp tất cả các tập con của A. Với các tập hợp A, B, C, chứng minh rằng

   (a) (1 điểm) Tập hợp rỗng $\emptyset$ không phải là tập lũy thừa của bất kỳ tập hợp nào.

   (b) (1 điểm) Nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$.

   (c) (1 điểm) Giả sử $A = B$. Chứng minh rằng với mọi tập C, nếu $C \subseteq A$ thì $C \subseteq B$.

   (d) (2 điểm) Chứng minh rằng nếu $A = B$ thì $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.

Lời giải:

(a) Với tập A bất kỳ, $\mathcal{P}(A)$ có ít nhất một phần tử là $\emptyset$. Do đó $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$ với mọi tập hợp A.

(b) Giả sử $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$. Ta chứng minh $A \subseteq C$ bằng định nghĩa. Cụ thể, với $x \in A$, ta chỉ ra rằng $x \in C$. Thật vậy, do $x \in A$ và $A \subseteq B$, ta có $x \in B$. Do $x \in B$ và $B \subseteq C$, ta có $x \in C$.

(c) Ta chứng minh $C \subseteq B$ bằng cách chỉ ra rằng với mọi $x \in C$, ta có $x \in B$. Thật vậy, do $x \in C$ và $C \subseteq A$, ta có $x \in A$. Do $x \in A$ và $A = B$, ta có $x \in B$.

(d) Ta chứng minh $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ và $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)$. Thật vây, với mọi $C \in \mathcal{P}(A)$, nghĩa là $C \subseteq A$, áp dụng (c) ta có $C \subseteq B$, nghĩa là $C \in \mathcal{P}(B)$. Do đó, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Tương tự, với mọi $C \in \mathcal{P}(B)$, nghĩa là $C \subseteq B$, áp dụng (c) ta có $C \subseteq A$, nghĩa là $C \in \mathcal{P}(A)$. Do đó, $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A)$.