

- Chọn 1 trong 2 câu. Nếu làm cả 2 câu thì tính câu điểm cao nhất
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.

Họ và Tên: _____

Mã Sinh Viên: _____ Lớp: _____

Câu:	1	2	Tổng
Điểm tối đa:	10	10	20
Điểm:			

1. Tìm một nghịch đảo của a theo môđun m trong các trường hợp sau

- (a) (4 điểm) $a = 55, m = 89$
(b) (4 điểm) $a = 89, m = 232$
(c) (2 điểm) $a = 51, m = 225$

Lời giải:

(a) Từ thuật toán Euclid, ta có:

$$89 = 55 \cdot 1 + 34$$

$$55 = 34 \cdot 1 + 21$$

$$34 = 21 \cdot 1 + 13$$

$$21 = 13 \cdot 1 + 8$$

$$13 = 8 \cdot 1 + 5$$

$$8 = 5 \cdot 1 + 3$$

$$5 = 3 \cdot 1 + 2$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

Do đó, ta cũng có:

$$\begin{aligned}1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ &= 3 - (5 - 3 \cdot 1) \cdot 1 \\ &= -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \\ &= -1 \cdot 5 + 2 \cdot (8 - 5 \cdot 1) \\ &= 2 \cdot 8 + (-3) \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 8 + (-3) \cdot (13 - 8 \cdot 1) \\ &= 5 \cdot 8 + (-3) \cdot 13 \\ &= 5 \cdot (21 - 13 \cdot 1) + (-3) \cdot 13 \\ &= 5 \cdot 21 + (-8) \cdot 13 \\ &= 5 \cdot 21 + (-8) \cdot (34 - 21 \cdot 1) \\ &= 13 \cdot 21 + (-8) \cdot 34 \\ &= 13 \cdot (55 - 34 \cdot 1) + (-8) \cdot 34 \\ &= 13 \cdot 55 + (-21) \cdot 34 \\ &= 13 \cdot 55 + (-21) \cdot (89 - 55 \cdot 1) \\ &= (-21) \cdot 89 + 34 \cdot 55\end{aligned}$$

Suy ra một nghịch đảo của 55 theo môđun 89 là 34.

(b) Từ thuật toán Euclid, ta có:

$$\begin{aligned}232 &= 89 \cdot 2 + 54 \\ 89 &= 54 \cdot 1 + 35 \\ 54 &= 35 \cdot 1 + 19 \\ 35 &= 19 \cdot 1 + 16 \\ 19 &= 16 \cdot 1 + 3 \\ 16 &= 3 \cdot 5 + 1 \\ 3 &= 1 \cdot 3 + 0\end{aligned}$$

Do đó, ta cũng có:

$$\begin{aligned}1 &= 16 - 3 \cdot 5 \\ &= 16 - (19 - 16 \cdot 1) \cdot 5 \\ &= (-5) \cdot 19 + 6 \cdot 16 \\ &= (-5) \cdot 19 + 6 \cdot (35 - 19 \cdot 1) \\ &= (-11) \cdot 19 + 6 \cdot 35 \\ &= (-11) \cdot (54 - 35 \cdot 1) + 6 \cdot 35 \\ &= (-11) \cdot 54 + 17 \cdot 35 \\ &= (-11) \cdot 54 + 17 \cdot (89 - 54 \cdot 1) \\ &= 17 \cdot 89 + (-28) \cdot 54 \\ &= 17 \cdot 89 + (-28) \cdot (232 - 89 \cdot 2) \\ &= (-28) \cdot 232 + 73 \cdot 89\end{aligned}$$

Suy ra một nghịch đảo của 89 theo môđun 232 là 73.

(c) Do $\gcd(51, 225) = 3 > 1$ và $225 > 2$, không tồn tại nghịch đảo của 51 theo môđun 225.

2. Có bao nhiêu số nguyên dương chẵn nhỏ hơn hoặc bằng 1000 thỏa mãn

- (a) (2 điểm) là bội của 7?
 (b) (2 điểm) là bội của cả 7 và 11?
 (c) (2 điểm) là bội của 7 nhưng không là bội của 11?
 (d) (2 điểm) là bội của 7 hoặc là bội của 11?
 (e) (2 điểm) không là bội của 7 và không là bội của 11?

Lời giải: Gọi $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq x \leq 1000 \wedge 2 \mid x \wedge 7 \mid x\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq x \leq 1000 \wedge 2 \mid x \wedge 11 \mid x\}$. Gọi $U = \{x \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq x \leq 1000 \wedge 2 \mid x\}$.

- (a) Ta cần đếm $|A|$. Theo giả thiết, với mọi $x \in A$, x đồng thời là bội của 2 và 7, do đó, $x = 14k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$. Do đó,

$$\begin{aligned} |A| &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq 14k \leq 1000\}| \\ &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq k \leq \lfloor 1000/14 \rfloor\}| \\ &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq k \leq 71\}| \\ &= 71 \end{aligned}$$

- (b) Ta cần đếm $|A \cap B|$. Theo giả thiết, với mọi $x \in A$, x đồng thời là bội của 2, 7, và 11, do đó, $x = 154k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$. Tương tự câu (a), ta có

$$\begin{aligned} |A \cap B| &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq 154k \leq 1000\}| \\ &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq k \leq \lfloor 1000/154 \rfloor\}| \\ &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq k \leq 6\}| \\ &= 6 \end{aligned}$$

- (c) Ta cần đếm $|A \setminus B|$. Ta có

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B| = 71 - 6 = 65$$

- (d) Ta cần đếm $|A \cup B|$. Theo nguyên lý bù trừ, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Ta tính $|B|$ như sau.

$$\begin{aligned} |B| &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq 22k \leq 1000\}| \\ &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq k \leq \lfloor 1000/22 \rfloor\}| \\ &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq k \leq 45\}| \\ &= 45 \end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 71 + 45 - 6 = 110$$

- (e) Ta cần tính $|U \setminus (A \cup B)|$. Trước tiên, ta tính $|U|$ như sau.

$$\begin{aligned} |U| &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq 2k \leq 1000\}| \\ &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq k \leq \lfloor 1000/2 \rfloor\}| \\ &= |\{k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq k \leq 500\}| \\ &= 500 \end{aligned}$$

Do $A \cup B \subseteq U$, ta có

$$|U \setminus (A \cup B)| = |U| - |A \cup B| = 500 - 110 = 390$$