

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Một mật khẩu wifi theo *giao thức WEP (Wired Equivalent Privacy – Bảo mật tương đương với mạng có dây)* là một chuỗi ký tự thập lục phân gồm 10, 26, hoặc 58 ký tự. Có tất cả bao nhiêu mật khẩu theo giao thức WEP?

Bài tập 2. Có bao nhiêu số nguyên dương giữa 100 và 999 thỏa mãn

- (a) chia hết cho 7?
- (b) là số lẻ?
- (c) có ba chữ số thập phân giống nhau?
- (d) không chia hết cho 4?
- (e) chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 4?
- (f) không chia hết cho cả 3 và 4?
- (g) chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4?
- (h) chia hết cho cả 3 và 4?

Bài tập 3. Có bao nhiêu số có 4 chữ số thỏa mãn

- (a) không chứa bất kỳ hai chữ số nào giống nhau?
- (b) kết thúc bởi một chữ số chẵn?
- (c) có chính xác ba chữ số là 9

Bài tập 4. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 bắt đầu với 000 hoặc kết thúc với 00?

Bài tập 5. Cần chọn ít nhất bao nhiêu số từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ để chắc chắn rằng có hai số trong các số được chọn có tổng bằng 9?

Bài tập 6. Chứng minh rằng trong một nhóm 10 người có ba người đôi một quen biết nhau hoặc bốn người đôi một không quen biết nhau, và có ba người đôi một không quen biết nhau hoặc bốn người đôi một quen biết nhau.

Bài tập 7. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 thỏa mãn điều kiện

- (a) có chứa chính xác bốn số 1?
- (b) có chứa nhiều nhất bốn số 1?
- (c) có chứa ít nhất bốn số 1?
- (d) có chứa số các số 0 bằng với số các số 1?

Bài tập 8. Có bao nhiêu cách xếp n bạn nam và n bạn nữ thành một hàng dài sao cho các bạn nam và nữ đứng xen kẽ nhau? (**Gợi ý:** Thử với một số giá trị nhỏ của n .)

Bài tập 9. Có bao nhiêu hoán vị của dãy các chữ cái $ABCDEFG$ có chứa

- (a) chuỗi ký tự BCD ?
- (b) chuỗi ký tự $CFGA$?
- (c) các chuỗi ký tự BA và GF ?
- (d) các chuỗi ký tự ABC và DE ?

Bài tập 10. Có bao nhiêu cách xếp 8 bạn nam và 5 bạn nữ thành một hàng dài sao cho không có hai bạn nữ nào đứng liền kề nhau? (**Gợi ý:** Đầu tiên tìm vị trí cho các bạn nam. Sau đó xét các vị trí có thể cho các bạn nữ.)

Bài tập 11. Giả sử có một nhóm gồm 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra một ban đại diện gồm 6 thành viên trong đó cần có số nam và nữ bằng nhau?

Bài tập 12. Sử dụng định lý nhị thức để tìm hệ số của $x^a y^b$ trong khai triển của $(2x^3 - 4y^2)^7$, với

- (a) $a = 9, b = 8$
- (b) $a = 8, b = 9$
- (c) $a = 0, b = 14$
- (d) $a = 12, b = 6$

Bài tập 13. Tìm n nếu

- (a) $\binom{n}{2} = 45$
- (b) $\binom{n}{5} = \binom{n}{2}$
- (c) $\binom{n}{3} = P(n, 2)$

Bài tập 14. Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên dương thì

$$1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \dots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} = 1.$$

Bài tập 15. Chứng minh rằng nếu n và k là các số nguyên với $1 \leq k \leq n$ thì

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

- (a) bằng cách sử dụng phương pháp đại số
- (b) bằng phương pháp đếm hai lần

Bài tập 16. Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên dương thì

$$\binom{2n}{2} = 2 \binom{n}{2} + n^2$$

- (a) bằng cách sử dụng phương pháp đại số
- (b) bằng phương pháp đếm hai lần

Bài tập 17. Bất phương trình $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, và $x_3 \geq 0$? (**Gợi ý:** Đưa vào thêm một biến tạm thời x_4 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$.)

Bài tập 18. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn điều kiện $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và

- (a) $x_1 \geq 1$?

(b) $x_i \geq 2$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

(c) $0 \leq x_1 \leq 10$?

(d) $0 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 < 4$, và $x_3 \geq 15$?

Bài tập 19. Có bao nhiêu chuỗi ký tự gồm 10 chữ số tam phân (0, 1, hoặc 2) có chứa chính xác hai số 0, ba số 1, và năm số 2?

Bài tập 20. Có bao nhiêu cách phân phối 6 quả bóng hoàn toàn giống nhau vào 9 hộp hoàn toàn khác nhau?

Bài tập 21. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1 000 000 có tổng các chữ số bằng 19?

Bài tập 22 (*). Có bao nhiêu cách chọn 5 ngày làm việc trong tháng Mười cho một phi công, biết rằng không thể chọn hai ngày làm việc nào liên tiếp nhau? (**Gợi ý:** Xét các khoảng thời gian phi công không làm việc. Có bao nhiêu cách chọn các khoảng thời gian này để đảm bảo điều kiện đề ra?)

Bài tập 23. Có bao nhiêu cách để phân phối 15 vật thể phân biệt vào 5 hộp phân biệt sao cho các hộp lần lượt có một, hai, ba, bốn, và năm vật thể ở trong chúng?