VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Cho $P(n)$ là vị từ

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(a) Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$

- Ở bước cơ sở, ta cần chứng minh điều gì?
- Ở bước quy nạp, giả thiết quy nạp là gì? Ta cần chứng minh điều gì?

(b) Hãy chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ bằng phương pháp quy nạp theo các bước bạn đã trả lời ở phần (a).

Bài tập 2. Chứng minh các mệnh đề sau bằng phương pháp quy nạp

(a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

(c) $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n = \frac{3(5^{n+1}-1)}{4}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 3. Trong Bài tập 3 phần Các cấu trúc cơ bản II, các bạn đã tìm nghiệm của mỗi hệ thức truy hồi sau với các điều kiện ban đầu cho trước bằng phương pháp thay thế và đoán nghiệm đã trình bày trong bài giảng. Hãy chứng minh các dự đoán của bạn là đúng bằng phương pháp quy nạp.

(a) $a_n = -a_{n-1}$, $a_0 = 5$

(b) $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_0 = 1$

(c) $a_n = a_{n-1} - n$, $a_0 = 4$

(d) $a_n = 2a_{n-1} - 3$, $a_0 = -1$

(e) $a_n = (n+1)a_{n-1}$, $a_0 = 2$

(f) $a_n = 2na_{n-1}$, $a_0 = 3$

(g) $a_n = -a_{n-1} + n - 1$, $a_0 = 7$

Bài tập 4. (a) Tìm một công thức tường minh cho tổng

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

bằng cách xét một số giá trị n nhỏ và đoán công thức.

(b) Hãy chứng minh dự đoán của bạn ở phần (a) bằng phương pháp quy nạp.

Bài tập 5. (a) Chứng minh rằng $3^n < n!$ nếu n là một số nguyên lớn hơn 6.

(b) Với các số nguyên không âm n nào thì $2n + 3 \leq 2^n$? Hãy chứng minh đáp án của bạn.

(c) Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 6. Với các tập hợp $A_1, A_2, \dots, A_n$ và B, hãy chứng minh các phát biểu sau đúng với mọi số nguyên $n \geq 2$

(a) $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \cdots \cap (A_n \cup B)$.

(b) $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$.

(c) $(A_1 - B) \cap (A_2 - B) \cap \cdots \cap (A_n - B) = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) - B$.

(d) $(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \cdots \cup (A_n - B) = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) - B$.

Bài tập 7. Chứng minh rằng một tập có n phần tử có $n(n-1)/2$ tập con chứa chính xác hai phần tử, với mọi số nguyên $n \geq 2$.

Bài tập 8. Giả sử m và n là các số nguyên dương với $m > n$ và f là một hàm từ $\{1, 2, \dots, m\}$ đến $\{1, 2, \dots, n\}$. Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh rằng f không phải là đơn ánh với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 9. Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh rằng $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n$ với mọi $n \geq 2$, trong đó $p_1, \dots, p_n$ là các mệnh đề lôgic.

Bài tập 10. (a) Chứng minh rằng ta không thể sử dụng quy nạp toán học để chứng minh $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$ với mọi số nguyên dương n.

(b) Chứng minh bằng quy nạp toán học rằng $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ với mọi số nguyên dương n, từ đó suy ra $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$ với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 11. Sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh rằng mọi số nguyên dương có thể được biểu diễn bằng tổng của các lũy thừa của 2, nghĩa là, bằng tổng của các phần tử của một tập con của $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$. (**Gợi ý:** Ở bước quy nạp, xét các trường hợp $k+1$ chẵn và $k+1$ lẻ. Khi $k+1$ chẵn, chú ý rằng $(k+1)/2$ là một số nguyên.)

Bài tập 12. Chứng minh bằng quy nạp mạnh sau đây sai ở đâu?
Ta chứng minh $P(n) :=$ "với mọi số nguyên không âm n, $5n = 0$".

- **Bước cơ sở:** $P(0)$ đúng, do $5 \cdot 0 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $5j = 0$ với mọi số nguyên không âm j thỏa mãn $0 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $5(k+1) = 0$. Thật vậy, ta có thể viết $k+1 = i+j$, với i, j là các số nguyên không âm nhỏ hơn $k+1$. Theo giả thiết quy nạp, $5(k+1) = 5(i+j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$.

Bài tập 13. Hãy tìm một định nghĩa đệ quy của

(a) Dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 4n - 2$ và $n = 1, 2, \dots$.

(b) Dãy $\{b_n\}$ với $b_n = n(n+1)$ và $n = 1, 2, \dots$.

(c) Tập hợp các số nguyên dương lẻ.

(d) Tập hợp các số nguyên dương là lũy thừa của 3.

(e) Tập hợp các số nguyên dương chia hết cho 5.

(f) Tập hợp các số nguyên dương không chia hết cho 5.

Bài tập 14. Cho dãy Fibonacci $\{f_n\}$. Chứng minh rằng $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$ với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 15. Chứng minh rằng tập S định nghĩa bởi $1 \in S$ và $s + t \in S$ nếu $s \in S$ và $t \in S$ là tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$. (Gợi ý: Chứng minh $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ và $\mathbb{Z}^+ \subseteq S$.)

Bài tập 16. Cho S là tập các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa bằng đệ quy như sau

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$.
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$, thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$.

(a) Sử dụng quy nạp mạnh với số lần áp dụng bước đệ quy trong định nghĩa của S ở trên, hãy chứng minh $a + b$ chia hết cho 5 với mọi $(a, b) \in S$.

(b) Sử dụng quy nạp theo cấu trúc để chứng minh $a + b$ chia hết cho 5 với mọi $(a, b) \in S$.