VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Tập hợp Bài tập

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn
Ngày 24 tháng 5 năm 2024

Mục lục

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

1 Lôgic mệnh đề

Bài tập 1. Câu nào sau đây là mệnh đề? Nếu là mệnh đề thì giá trị chân lý của nó là gì?

(a) Trả lời câu hỏi này.

(b) $x + 2 = 11$.

(c) $5 + 7 = 10$.

(d) Mấy giờ rồi?

(e) $2^n \geq 100$.

Bài tập 2. Khẳng định "Phát biểu này là sai" có phải là một mệnh đề lôgic hay không? Vì sao?

Trong các bài tập sau, p, q, r ký hiệu các mệnh đề.

Bài tập 3. Gọi $p :=$ "Tôi mua một vé xổ số tuần này" và $q :=$ "Tôi trúng giải đặc biệt 1 triệu đôla". Hãy mô tả bằng câu thông thường các mệnh đề sau:

(a) $\neg p$

(b) $p \vee q$

(c) $p \to q$

(d) $p \wedge q$

(e) $p \leftrightarrow q$

(f) $\neg p \to \neg q$

(g) $\neg p \wedge \neg q$

(h) $\neg p \vee (p \wedge q)$

Bài tập 4. Xây dựng bảng chân trị cho các mệnh đề phức hợp sau

(a) $p \to \neg q$

(b) $\neg p \leftrightarrow q$

(c) $(p \to q) \vee (\neg p \to q)$

(d) $(p \to q) \wedge (\neg p \to q)$

(e) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$

(f) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

Bài tập 5. Xây dựng bảng chân trị cho các mệnh đề phức hợp sau

(a) $p \oplus p$

(b) $p \oplus \neg p$

(c) $p \oplus \neg q$

(d) $\neg p \oplus \neg q$

(e) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$

(f) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$

Bài tập 6. Giả sử bảng chân trị với n biến mệnh đề đã được cho trước đầy đủ các giá trị chân lý. Một mệnh đề phức hợp tương ứng với bảng chân trị đó có thể tạo thành bằng cách lấy tuyển các hội của các biến hoặc phủ định của chúng. Đối với mỗi tổ hợp các giá trị sao cho mệnh đề phức hợp là đúng ta đưa vào một hội. Mệnh đề tạo thành được gọi là có *dạng tuyển chuẩn tắc (DNF - Disjunctive Normal Form)*.

Với mỗi mệnh đề ở các Bài tập 4 và 5, hãy tìm một mệnh đề tương đương lôgic dạng tuyển chuẩn tắc.

Bài tập 7. Tính các biểu thức sau

1. $11000 \wedge (01011 \vee 11011)$
2. $(01111 \wedge 10101) \vee 01000$
3. $(01010 \oplus 11011) \oplus 01000$
4. $(11011 \vee 01010) \wedge (10001 \vee 11011)$

Bài tập 8. Chứng minh các tương đương lôgic sau

(a) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

(b) $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

(c) $\neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$

(d) $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$

(e) $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$

(f) $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$

(g) $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

(h) $\neg p \to (q \to r) \equiv q \to (p \vee r)$

Bài tập 9. *Đối ngẫu* của một mệnh đề phức hợp chỉ chứa các toán tử logic $\wedge$, $\vee$, và $\neg$ là một mệnh đề nhận được bằng cách thay mỗi $\vee$ bằng $\wedge$, mỗi $\wedge$ bằng $\vee$, mỗi **T** bằng **F**, và mỗi **F** bằng **T**. Đối ngẫu của một mệnh đề phức hợp s được ký hiệu là $s^\star$.

(a) Tìm đối ngẫu của các mệnh đề sau

(a-1) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

(a-2) $p \wedge (q \vee (r \wedge \mathbf{T}))$

(b) Khi nào thì $s = s^\star$, với s là một mệnh đề phức hợp nào đó?

(c) Chứng minh rằng $(s^\star)^\star = s$.

(**Chú ý:** Với hai mệnh đề p, q, chú ý rằng $p = q$ khác với $p \equiv q$. Ví dụ $p \neq p \wedge \mathbf{T}$ nhưng $p \equiv p \wedge \mathbf{T}$.)

2 Lôgic vị từ

Bài tập 10. Tìm phản ví dụ, nếu có, của các mệnh đề sau, trong đó các biến xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

(a) $\forall x\, (x^2 \neq x)$

(b) $\forall x\, (x^2 \geq x)$

(c) $\forall x\, (x^2 \neq 2)$

Bài tập 11. Giả sử A là một mệnh đề và x không phải là một biến tự do trong A. Giả sử miền xác định không rỗng. Hãy chứng minh các tương đương lôgic sau

(a) $(\forall x\, P(x)) \vee A \equiv \forall x\, (P(x) \vee A)$

(b) $(\exists x\, P(x)) \vee A \equiv \exists x\, (P(x) \vee A)$

(c) $(\forall x\, P(x)) \wedge A \equiv \forall x\, (P(x) \wedge A)$

(d) $(\exists x\, P(x)) \wedge A \equiv \exists x\, (P(x) \wedge A)$

Bài tập 12. Chứng minh các mệnh đề sau không tương đương lôgic

(a) $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$ và $\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$

(b) $\forall x\, (P(x) \leftrightarrow Q(x))$ và $\forall x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, Q(x)$

(**Gợi ý:** Chọn $P(x)$ và $Q(x)$ sao cho mệnh đề đầu tiên sai và mệnh đề thứ hai đúng.)

Bài tập 13. Chứng minh rằng các mệnh đề $\neg\exists x \forall y\, P(x, y)$ và $\forall x \exists y\, \neg P(x, y)$ là tương đương lôgic, giả thiết rằng các biến trong hai mệnh đề có cùng miền xác định.

Bài tập 14. Hãy biểu diễn phủ định của các mệnh đề sau sao cho tất cả các ký tự $\neg$ đứng ngay trước các vị từ.

(a) $\forall x \exists y \forall z\, T(x, y, z)$

(b) $\forall x \exists y\, P(x, y) \vee \forall x \exists y\, Q(x, y)$

(c) $\forall x \exists y\, (P(x, y) \wedge \exists z\, R(x, y, z))$

(d) $\forall x \exists y\, (P(x, y) \to Q(x, y))$

3 Chứng minh

Bài tập 15. Chứng minh trực tiếp các mệnh đề sau.

(a) Tổng của hai số lẻ là một số chẵn

(b) Tổng của hai số chẵn là một số chẵn

(c) Bình phương của một số chẵn là một số chẵn

(d) Tích của hai số lẻ là một số lẻ

Bài tập 16. Chứng minh các mệnh đề sau bằng phương pháp phản chứng.

(a) Tổng của một số vô tỷ và một số hữu tỷ là một số vô tỷ

(b) Nếu n là một số nguyên và $n^3 + 5$ lẻ, thì n chẵn.

(c) Nếu n là một số nguyên và $3n + 2$ chẵn, thì n chẵn.

Bài tập 17. Chứng minh các mệnh đề sau. Nêu rõ phương pháp bạn sử dụng.

(a) Nếu n là số nguyên chẵn thì $(-1)^n = 1$.

(b) Nếu x, y, z là các số nguyên và $x + y + z$ lẻ, thì ít nhất một trong ba số x, y, z là lẻ.

(c) Nếu m và n là các số nguyên và mn chẵn, thì m chẵn hoặc n chẵn.

(d) Nếu n là một số nguyên dương, thì n chẵn khi và chỉ khi $7n + 4$ chẵn.

(e) Nếu n là một số nguyên dương, thì n lẻ khi và chỉ khi $5n + 6$ lẻ.

(f) $m^2 = n^2$ khi và chỉ khi $m = n$ hoặc $m = -n$

Bài tập 18. Chứng minh rằng

1. Có ít nhất mười ngày trong 64 ngày bất kỳ rơi vào cùng một ngày của một tuần (nghĩa là, có ít nhất mười ngày cùng là Thứ Hai, hoặc cùng là Thứ Ba, v.v...).
2. Có ít nhất ba ngày trong 25 ngày bất kỳ rơi vào cùng một tháng của năm.

Bài tập 19. Những lý luận sau để tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 1} = x$ là đúng hay sai.

(1) Cho $\sqrt{2x^2 - 1} = x$

(2) Bình phương cả hai vế của (1), ta có $2x^2 - 1 = x^2$

(3) Trừ x^2 từ cả hai vế của (2), ta có $x^2 - 1 = 0$

(4) Phân tích vế trái của (3) thành nhân tử, ta có $(x - 1)(x + 1) = 0$

(5) Bởi vì nếu $ab = 0$ thì $a = 0$ hoặc $b = 0$, ta có $x = -1$ hoặc $x = 1$

Bài tập 20. Sử dụng phương pháp phản chứng, hãy chứng minh rằng $\sqrt{2}$ không phải là một số hữu tỷ.

Bài tập 21. Sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh rằng không có số hữu tỷ r nào thỏa mãn $r^3 + r + 1 = 0$
(**Gợi ý:** Giả sử rằng $r = a/b$ là một nghiệm, trong đó a, b là các số nguyên và a/b là tối giản. Bằng cách nhân cả hai vế với b^3, ta thu được một phương trình với các số nguyên. Hãy xét tính chẵn lẻ của a và b.)

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

1 Tập hợp

Bài tập 1. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{0, 3, 6\}$. Tìm

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $A - B$

(d) $A \Delta B$

Bài tập 2. Tìm các tập A và B, biết rằng $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$, và $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Bài tập 3. Cho các tập hợp A, B. Chứng minh

(a) $(A \cap B) \subseteq A$

(b) $A \subseteq (A \cup B)$

(c) $A - B \subseteq A$

(d) $A \cap (A - B) = \emptyset$

(e) $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bài tập 4. Hãy chứng minh rằng với các tập A, B, C, $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ bằng cách

(a) Chứng minh theo định nghĩa. (Nhắc lại: $A = B$ khi và chỉ khi $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.)

(b) Dùng bảng tính thuộc.

Bài tập 5. Với các tập A, B, C, có thể kết luận rằng $A = B$ nếu

(a) $A \cup C = B \cup C$?

(b) $A \cap C = B \cap C$?

(c) $A \cup C = B \cup C$ và $A \cap C = B \cap C$?

Bài tập 6. Với A là tập con của một tập vũ trụ U, chứng minh rằng

(a) $A \Delta U = \overline{A}$

(b) $A \Delta \overline{A} = U$

Bài tập 7. Với hai tập A, B bất kỳ, chứng minh

(a) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(b) $A \Delta B = B \Delta A$

(c) $(A \Delta B) \Delta B = A$

Bài tập 8. Có thể nói gì về các tập A, B nếu $A \Delta B = A$?

Bài tập 9. Chứng minh rằng $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$ với A, B, C là các tập hữu hạn bất kỳ. (Đây là trường hợp đặc biệt của *nguyên lý bù trừ (inclusion-exclusion principle)* sẽ được đề cập ở phần sau.)

Bài tập 10. Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times C) \cup (B \times C)$

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times C) \cap (B \times C)$

trong đó A, B, C là các tập bất kỳ.

2 Hàm

Bài tập 11. Hãy tìm ví dụ một hàm f từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{N}$ thỏa mãn

(a) f là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

(b) f là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

(c) f là song ánh và f khác hàm đồng nhất trên $\mathbb{N}$

(d) f vừa không là đơn ánh vừa không là toàn ánh

Bài tập 12. Hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là đơn ánh không?

(a) $f(n) = n - 1$

(b) $f(n) = n^2 + 1$

(c) $f(n) = n^3$

(d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

Bài tập 13. Hàm $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là toàn ánh không?

(a) $f(m, n) = 2m - n$

(b) $f(m, n) = m^2 - n^2$

(c) $f(m, n) = m + n + 1$

(d) $f(m, n) = m^2 - 4$

Bài tập 14. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là song ánh không?

(a) $f(x) = -3x + 4$

(b) $f(x) = -3x^2 + 7$

(c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

(d) $f(x) = x^5 + 1$

(e) $f(x) = 2x + 1$

(f) $f(x) = x^2 + 1$

(g) $f(x) = x^3$

(h) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2) + 2$

Bài tập 15. Gọi $f : A \to B$ là một hàm với A, B là các tập hữu hạn thỏa mãn $|A| = |B|$. Chứng minh rằng f là đơn ánh khi và chỉ khi nó là toàn ánh.

Bài tập 16. Cho các hàm $g : A \to B$ và $f : B \to C$. Chứng minh rằng

(a) Nếu cả g và f đều là đơn ánh thì $f \circ g$ cũng là đơn ánh.

(b) Nếu cả g và f đều là toàn ánh thì $f \circ g$ cũng là toàn ánh.

(c) Nếu $f \circ g$ là toàn ánh thì f cũng là toàn ánh

(d) Nếu $f \circ g$ là đơn ánh thì g cũng là đơn ánh

(e) Nếu $f \circ g$ là song ánh thì g là toàn ánh khi và chỉ khi f là đơn ánh

Bài tập 17. Tìm ví dụ các hàm f và g thỏa mãn $f \circ g$ là song ánh, nhưng g không phải toàn ánh và f không phải đơn ánh.

Bài tập 18. Chứng minh các tính chất sau của hàm trần và hàm sàn, trong đó $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}$

(1a) $\lfloor x \rfloor = n$ khi và chỉ khi $n \le x < n + 1$

(1b) $\lceil x \rceil = n$ khi và chỉ khi $n - 1 < x \le n$

(1c) $\lfloor x \rfloor = n$ khi và chỉ khi $x - 1 < n \le x$

(1d) $\lceil x \rceil = n$ khi và chỉ khi $x \le n < x + 1$

(2) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x + 1$

(3a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

(3b) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

(4a) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

(4b) $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$

Bài tập 19. Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{N}$ thì $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$ nếu n chẵn và $\lfloor n/2 \rfloor = (n - 1)/2$ nếu n lẻ.

Bài tập 20. Chứng minh rằng nếu $x \in \mathbb{R}$ thì $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$.
(**Gợi ý:** Khi xét các bài toán liên quan đến hàm sàn, một cách tiếp cận hữu ích là đặt $x = n + \epsilon$ trong đó $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ và ϵ là một số thực thỏa mãn $0 \le \epsilon < 1$. Tương tự, với hàm trần, có thể đặt $x = n - \epsilon$.)

3 Dãy và Tổng

Bài tập 21. Trong mỗi trường hợp sau, tìm các số hạng $a_0, a_1, \ldots, a_5$ của dãy $\{a_n\}$ nếu

(a) $a_n = 2^{n-1}$

(b) $a_n = 1 + (-1)^n$

(c) $a_n = (n+1)^{n+1}$

(d) $a_n = 7$

(e) $a_n = -(-2)^n$

(f) $a_n = \lfloor n/2 \rfloor$

Bài tập 22. Dãy $\{a_n\}$ có phải là lời giải của hệ thức truy hồi $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$ nếu

(a) $a_n = 0$?

(b) $a_n = 1$?

(c) $a_n = 2^n$?

(d) $a_n = 4^n$?

(e) $a_n = n4^n$?

(f) $a_n = 2 \cdot 4^n + 3n4^n$?

(g) $a_n = (-4)^n$?

(h) $a_n = n^2 4^n$?

Bài tập 23. Tìm lời giải cho mỗi hệ thức truy hồi sau với các điều kiện ban đầu tương ứng cho trước bằng phương pháp đã trình bày trong bài giảng.

(a) $a_n = -a_{n-1}$, $a_0 = 5$

(b) $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_0 = 1$

(c) $a_n = a_{n-1} - n$, $a_0 = 4$

(d) $a_n = 2a_{n-1} - 3$, $a_0 = -1$

(e) $a_n = (n+1)a_{n-1}$, $a_0 = 2$

(f) $a_n = 2na_{n-1}$, $a_0 = 3$

(g) $a_n = -a_{n-1} + n - 1$, $a_0 = 7$

Bài tập 24. Cho $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Tìm a_0, a_1, a_2, a_3, và a_4.

(b) Hãy chứng minh $a_2 = 5a_1 - 6a_0$, $a_3 = 5a_2 - 6a_1$, và $a_4 = 5a_3 - 6a_2$.

(c) Hãy chỉ ra rằng $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$.

Bài tập 25. Giả thiết dân số thế giới năm 2017 là 7.6 tỷ người và tăng theo tỷ lệ 1.12%/năm.

(a) Xây dựng hệ thức truy hồi cho dân số thế giới n năm sau 2017.

(b) Tìm công thức tường minh để tính dân số thế giới n năm sau 2017.

(c) Dân số thế giới năm 2050 sẽ là bao nhiêu?

Bài tập 26. Một người nộp 1000 USD vào một tài khoản tiết kiệm với lãi suất 9%/năm và mỗi năm tiền lãi được chuyển vào tài khoản vào ngày cuối cùng của năm. Giả thiết rằng chỉ có thể rút tiền khi đóng tài khoản.

(a) Xây dựng hệ thức truy hồi để tính số tiền trong tài khoản sau n năm.

(b) Tìm công thức tường minh để tính số tiền trong tài khoản sau n năm.

(c) Sau 100 năm, trong tài khoản có bao nhiêu tiền?

Bài tập 27. Với mỗi dãy số nguyên sau, hãy tìm một công thức đơn giản hoặc một cách để tìm các số hạng tiếp theo của dãy. Giả sử công thức bạn tìm ra là đúng, hãy tìm ba số hạng tiếp theo của dãy

(a) $1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$

(b) $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, \ldots$

(c) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \ldots$

(d) $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots$

(e) $15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, \ldots$

(f) $3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, \ldots$

(g) $2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, \ldots$

(h) $2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321, \ldots$

Bài tập 28. Tính các tổng sau

(a) $\sum_{k=100}^{200} k$

(b) $\sum_{k=99}^{200} k^3$

(c) $\sum_{10}^{20} k^2(k-3)$

Bài tập 29. (a) Chứng minh rằng $\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$, trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là một dãy gồm các số thực.

(b) Sử dụng đẳng thức $1/(k(k+1)) = 1/k - 1/(k+1)$ và phần (a) để tính $\sum_{k=1}^{n} 1/(k(k+1))$.

Bài tập 30. Lấy tổng cả hai vế của đẳng thức $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$ từ $k = 1$ đến $k = n$ và sử dụng Bài tập 29(a) để tìm một công thức tường minh cho $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (tổng n số tự nhiên lẻ đầu tiên).

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Cho $P(n)$ là vị từ

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(a) Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$

- Ở bước cơ sở, ta cần chứng minh điều gì?
- Ở bước quy nạp, giả thiết quy nạp là gì? Ta cần chứng minh điều gì?

(b) Hãy chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ bằng phương pháp quy nạp theo các bước bạn đã trả lời ở phần (a).

Bài tập 2. Chứng minh các mệnh đề sau bằng phương pháp quy nạp

(a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

(c) $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài tập 3. Trong Bài tập 3 phần Các cấu trúc cơ bản II, các bạn đã tìm nghiệm của mỗi hệ thức truy hồi sau với các điều kiện ban đầu cho trước bằng phương pháp thay thế và đoán nghiệm đã trình bày trong bài giảng. Hãy chứng minh các dự đoán của bạn là đúng bằng phương pháp quy nạp.

(a) $a_n = -a_{n-1}$, $a_0 = 5$

(b) $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_0 = 1$

(c) $a_n = a_{n-1} - n$, $a_0 = 4$

(d) $a_n = 2a_{n-1} - 3$, $a_0 = -1$

(e) $a_n = (n+1)a_{n-1}$, $a_0 = 2$

(f) $a_n = 2na_{n-1}$, $a_0 = 3$

(g) $a_n = -a_{n-1} + n - 1$, $a_0 = 7$

Bài tập 4. (a) Tìm một công thức tường minh cho tổng

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

bằng cách xét một số giá trị n nhỏ và đoán công thức.

(b) Hãy chứng minh dự đoán của bạn ở phần (a) bằng phương pháp quy nạp.

Bài tập 5. (a) Chứng minh rằng $3^n < n!$ nếu n là một số nguyên lớn hơn 6.

(b) Với các số nguyên không âm n nào thì $2n + 3 \leq 2^n$? Hãy chứng minh đáp án của bạn.

(c) Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 6. Với các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và B, hãy chứng minh các phát biểu sau đúng với mọi số nguyên $n \geq 2$

(a) $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \cdots \cap (A_n \cup B)$.

(b) $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$.

(c) $(A_1 - B) \cap (A_2 - B) \cap \cdots \cap (A_n - B) = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) - B$.

(d) $(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \cdots \cup (A_n - B) = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) - B$.

Bài tập 7. Chứng minh rằng một tập có n phần tử có $n(n-1)/2$ tập con chứa chính xác hai phần tử, với mọi số nguyên $n \geq 2$.

Bài tập 8. Giả sử m và n là các số nguyên dương với $m > n$ và f là một hàm từ $\{1, 2, \ldots, m\}$ đến $\{1, 2, \ldots, n\}$. Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh rằng f không phải là đơn ánh với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 9. Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh rằng $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n$ với mọi $n \geq 2$, trong đó $p_1, \ldots, p_n$ là các mệnh đề lôgic.

Bài tập 10. (a) Chứng minh rằng ta không thể sử dụng quy nạp toán học để chứng minh $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$ với mọi số nguyên dương n.

(b) Chứng minh bằng quy nạp toán học rằng $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ với mọi số nguyên dương n, từ đó suy ra $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2$ với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 11. Sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh rằng mọi số nguyên dương có thể được biểu diễn bằng tổng của các lũy thừa của 2, nghĩa là, bằng tổng của các phần tử của một tập con của $\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots\}$. (**Gợi ý:** Ở bước quy nạp, xét các trường hợp $k+1$ chẵn và $k+1$ lẻ. Khi $k+1$ chẵn, chú ý rằng $(k+1)/2$ là một số nguyên.)

Bài tập 12. Chứng minh bằng quy nạp mạnh sau đây sai ở đâu?
Ta chứng minh $P(n) :=$ "với mọi số nguyên không âm n, $5n = 0$".

- **Bước cơ sở:** $P(0)$ đúng, do $5 \cdot 0 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $5j = 0$ với mọi số nguyên không âm j thỏa mãn $0 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $5(k+1) = 0$. Thật vậy, ta có thể viết $k+1 = i+j$, với i, j là các số nguyên không âm nhỏ hơn $k+1$. Theo giả thiết quy nạp, $5(k+1) = 5(i+j) = 5i + 5j = 0 + 0 = 0$.

Bài tập 13. Hãy tìm một định nghĩa đệ quy của

(a) Dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 4n - 2$ và $n = 1, 2, \ldots$.

(b) Dãy $\{b_n\}$ với $b_n = n(n+1)$ và $n = 1, 2, \ldots$.

(c) Tập hợp các số nguyên dương lẻ.

(d) Tập hợp các số nguyên dương là lũy thừa của 3.

(e) Tập hợp các số nguyên dương chia hết cho 5.

(f) Tập hợp các số nguyên dương không chia hết cho 5.

Bài tập 14. Cho dãy Fibonacci $\{f_n\}$. Chứng minh rằng $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$ với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 15. Chứng minh rằng tập S định nghĩa bởi $1 \in S$ và $s + t \in S$ nếu $s \in S$ và $t \in S$ là tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$. (Gợi ý: Chứng minh $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ và $\mathbb{Z}^+ \subseteq S$.)

Bài tập 16. Cho S là tập các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa bằng đệ quy như sau

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$.
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$, thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$.

(a) Sử dụng quy nạp mạnh với số lần áp dụng bước đệ quy trong định nghĩa của S ở trên, hãy chứng minh $a + b$ chia hết cho 5 với mọi $(a, b) \in S$.

(b) Sử dụng quy nạp theo cấu trúc để chứng minh $a + b$ chia hết cho 5 với mọi $(a, b) \in S$.

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Thiết kế thuật toán để tính tổng của tất cả các số hạng trong một dãy số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n$ cho trước. Chứng minh thuật toán bạn thiết kế là đúng.

Bài tập 2. Cho trước một dãy không giảm các số nguyên $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n$. Hãy thiết kế một thuật toán để tìm các số xuất hiện nhiều hơn một lần trong dãy.

Bài tập 3. Một chuỗi ký tự được gọi là *chuỗi đối xứng (palindrome)* khi viết từ trái qua phải và viết từ phải qua trái thì chuỗi không thay đổi. Một ví dụ là chuỗi `madam`. Hãy thiết kế thuật toán để kiểm tra xem một chuỗi ký tự có phải là chuỗi đối xứng hay không.

Bài tập 4. Hãy thiết kế một thuật toán để hoán đổi các giá trị của các biến x và y chỉ sử dụng các phép gán giá trị.

Bài tập 5. Cho $f : A \to B$ là một hàm với các tập A, B là các tập con hữu hạn của $\mathbb{Z}$. Hãy thiết kế một thuật toán để kiểm tra xem

(a) liệu f có là đơn ánh;

(b) liệu f có là toàn ánh.

Bài tập 6. Sử dụng sắp xếp nổi bọt để sắp xếp các phần tử trong dãy $6, 2, 3, 1, 5, 4$. Hãy viết cụ thể các dãy nhận được ở từng bước của thuật toán. Làm tương tự với sắp xếp chèn.

Bài tập 7. Một thuật toán tính x^n với $x \in \mathbb{R}^+$ và $n \in \mathbb{N}$ được mô tả như sau

Thuật toán 1: Tính x^n.

Input: x: số thực dương, n: số tự nhiên
Output: Giá trị của x^n

$answer := 1$
while $n > 0$ **do**
  $answer := answer \times x$
  $n := n - 1$
return $answer$

Hãy chứng minh phát biểu sau là một bất biến vòng lặp cho vòng **while**

Ở trước lần lặp thứ i $(i \geq 1)$, $answer = x^{i-1}$.

(Chú ý là "lần lặp thứ i" khác với "lần lặp i". Khi ta nói "lần lặp i", ta chỉ lần lặp của vòng **while** mà giá trị của n bằng i. Khi ta nói "lần lặp thứ i", ta chỉ thứ tự thực hiện của lần lặp đó trong vòng **while**.)

Bài tập 8. Chứng minh rằng

(1) x^3 là $O(x^4)$ nhưng x^4 không là $O(x^3)$.

(2) $3x^4 + 1$ là $O(x^4/2)$ và $x^4/2$ là $O(3x^4 + 1)$.

(3) $x \log x$ là $O(x^2)$ nhưng x^2 không là $O(x \log x)$.

(4) 2^n là $O(3^n)$ nhưng 3^n không là $O(2^n)$.

Bài tập 9. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là $O(x)$ thì $f(x)$ cũng là $O(x^2)$.

Bài tập 10. Hãy giải thích một hàm $f(x)$ là $O(1)$ nghĩa là gì. Tương tự với $\Omega(1)$ và $\Theta(1)$.

Bài tập 11. Chứng minh rằng với các hàm f, g từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$, f là $\Theta(g)$ khi và chỉ khi tồn tại các hằng số dương C_1, C_2, và k sao cho $C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$ với mọi $x > k$.

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Thuật toán II

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Sắp xếp dãy sau bằng cách sử dụng sắp xếp trộn $4, 7, 0, 3, 8, 9, 1$

Bài tập 2. Đánh giá thời gian chạy của các thuật toán đệ quy mô tả trong bài giảng (tính giai thừa, lũy thừa, tìm kiếm tuyến tính, tìm kiếm nhị phân, sắp xếp trộn)

Bài tập 3. Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau

(a) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$

(b) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ $(n \geq 3)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$

(c) $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \cdot 4^n$ $(n \geq 3)$, $a_1 = 56$, $a_2 = 278$

Bài tập 4. Sử dụng hàm sinh để giải các hệ thức truy hồi sau

(a) $a_n = 7a_{n-1}$ $(n \geq 1)$ với $a_0 = 5$

(b) $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ $(k \geq 2)$, $a_0 = 6$, $a_1 = 30$

Bài tập 5. Ước lượng các hệ thức truy hồi sau theo O-lớn, giả sử $T(1) = 1$

(a) $T(n) = 4T(n/3) + n^2$

(b) $T(n) = 4T(n/2) + n^2$

(c) $T(n) = 3T(n/3) + n$

(d) $T(n) = 3T(n/3) + 1$

Bài tập 6. Sử dụng cây đệ quy để ước lượng $T(n)$ cho bởi các hệ thức truy hồi sau

(a) $T(n) = 2T(n/2) + n^2$

(b) $T(n) = T(n/2) + 1$

(c) $T(n) = 2T(n-1) + 1$

Bài tập 7. Hệ thức $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$ không thỏa mãn các điều kiện của Định lý thợ nên ta không thể ước lượng nó thông qua Định lý. Tuy nhiên, ta vẫn có thể sử dụng cây đệ quy để ước lượng $T(n)$ trong trường hợp này. Hãy sử dụng cây đệ quy để chỉ ra $T(n) = O(n \log^2 n)$

Bài tập 8. Ta có thể chứng minh Định lý thợ bằng cách sử dụng cây đệ quy

(a) Vẽ cây đệ quy cho $T(n) = aT(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với k là số nguyên dương nào đó, $a \geq 1$, b là số nguyên dương lớn hơn 1, và c, d là các số thực với c dương và d không âm

(b) Tính tổng từng hàng và viết công thức của $T(n)$ dưới dạng tổng của các hàng trong cây.

(c) Xét các trường hợp $a < b^d$, $a = b^d$, và $a > b^d$

Bài tập 9. Một *cây van Emde Boas (van Emde Boas tree)* là một cấu trúc dữ liệu đệ quy cho phép chúng ta chèn, xóa, và tìm kiếm phần tử x nào đó trong một tập vũ trụ $U = \{1, 2, \dots, u\}$ một cách nhanh chóng. Thời gian chèn, xóa, tìm kiếm trong một cây van Emde Boas được cho bởi hệ thức truy hồi $T(u) = T(\sqrt{u}) + 1$ và $T(1) = 1$. Hãy ước lượng $T(u)$. (**Gợi ý:** Định nghĩa $R(k) = T(2^k)$. Giải cho $R(k)$ có vẻ dễ dàng hơn!)

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Lý thuyết số cơ bản

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Biểu diễn các số nguyên sau dưới dạng nhị phân

(a) 231

(b) 4532

(c) 97644

Bài tập 2. Tính tổng và tích các số nhị phân sau

(a) $(1000111)_2$ và $(1110111)_2$

(b) $(11101111)_2$ và $(10111101)_2$

Bài tập 3. Sử dụng thuật toán tính $b^n \bmod m$ thông qua biểu diễn nhị phân của n để tính $7^{644} \bmod 645$.

Bài tập 4. Tính các biểu thức sau

(a) $(-133 \bmod 23 + 261 \bmod 23) \bmod 23$

(b) $((457 \bmod 23) \cdot (182 \bmod 23)) \bmod 23$

(c) $(99^2 \bmod 32)^3 \bmod 15$

(d) $(3^4 \bmod 17)^2 \bmod 11$

Bài tập 5. Chứng minh rằng nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$, trong đó a, b, c, d và m là các số nguyên thỏa mãn $m \geq 2$, thì $a - c \equiv b - d \pmod{m}$.

Bài tập 6. Giá trị của hàm Euler ϕ tại số nguyên dương n được định nghĩa là số các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng n và nguyên tố cùng nhau với n. Ví dụ, $\phi(6) = 2$ vì trong các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 6, chỉ có 1 và 5 là nguyên tố cùng nhau với 6.

(a) Tính $\phi(4)$, $\phi(10)$, và $\phi(13)$.

(b) Chứng minh rằng n là số nguyên tố khi và chỉ khi $\phi(n) = n - 1$

Bài tập 7. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, tồn tại một dãy n hợp số liên tiếp. (**Gợi ý:** Xét dãy số nguyên liên tiếp bắt đầu từ $(n + 1)! + 2$.)

Bài tập 8. Tìm $\gcd(92928, 123552)$ and $\operatorname{lcm}(92928, 123552)$, và kiểm tra lại rằng $\gcd(92928, 123552) \cdot \operatorname{lcm}(92928, 123552) = 92928 \cdot 123552$. (**Gợi ý:** Phân tích 92928 và 123552 thành tích các thừa số nguyên tố.)

Bài tập 9. Sử dụng thuật toán Euclid để tìm

(a) $\gcd(12, 18)$

(b) $\gcd(111, 201)$

(c) $\gcd(1001, 1331)$

Bài tập 10. Biểu diễn ước chung lớn nhất của các cặp số sau dưới dạng tổ hợp tuyến tính của chúng

(a) $10, 11$

(b) $21, 44$

(c) $36, 48$

(d) $34, 55$

(e) $117, 213$

Bài tập 11. Chứng minh rằng tích của ba số nguyên liên tiếp bất kỳ chia hết cho 6

Bài tập 12. Chứng minh rằng nếu a, b, m là các số nguyên với $m \geq 2$ và $a \equiv b \pmod{m}$ thì $\gcd(a, m) = \gcd(b, m)$. (**Gợi ý:** Chứng minh tập các ước chung của a và m bằng với tập các ước chung của b và m.)

Bài tập 13 ($\star$)**.** Chứng minh rằng nếu a và b đều là các số nguyên dương thì

$$(2^a - 1) \bmod (2^b - 1) = 2^{a \bmod b} - 1$$

(**Gợi ý:** $2^a - 1 = 2^{a-b}(2^b - 1) + 2^{a-b} - 1$.)

Bài tập 14. Giải phương trình $15x^2 + 19x \equiv 5 \pmod{11}$. (**Gợi ý:** Chứng minh rằng phương trình đã cho tương đương với $15x^2 + 19x + 6 \equiv 0 \pmod{11}$. Phân tích vế trái của phương trình này thành nhân tử. Phương trình có nghiệm khi nào? Tại sao? Xem lại Bài tập 4 trong slides "Lý thuyết số cơ bản".)

Bài tập 15. Giải hệ phương trình sau bằng hai phương pháp đã đề cập trong bài giảng (sử dụng chứng minh của Định lý Phần dư Trung Hoa hoặc phương pháp thay thế ngược)

$$x \equiv 1 \pmod{2} \tag{1}$$
$$x \equiv 2 \pmod{3} \tag{2}$$
$$x \equiv 3 \pmod{5} \tag{3}$$
$$x \equiv 4 \pmod{11} \tag{4}$$

Bài tập 16 ($\star$)**.** Giải hệ phương trình

$$x \equiv 5 \pmod{6} \tag{5}$$
$$x \equiv 3 \pmod{10} \tag{6}$$
$$x \equiv 8 \pmod{15} \tag{7}$$

Chú ý: 6, 10, và 15 *không* đôi một nguyên tố cùng nhau.

Bài tập 17. Những số nguyên nào chia 2 dư 1 và chia 3 cũng dư 1?

Bài tập 18. Sử dụng Định lý Fermat nhỏ để tính

(a) $7^{121} \bmod 13$

(b) $23^{1002} \bmod 41$

(c) nghịch đảo của 5^{39} theo môđun 41

Bài tập 19. Sử dụng sự trợ giúp từ Định lý Fermat nhỏ, hãy chứng minh rằng 42 là ước của $n^7 - n$.

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Các phương pháp đếm

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Một mật khẩu wifi theo *giao thức WEP (Wired Equivalent Privacy – Bảo mật tương đương với mạng có dây)* là một chuỗi ký tự thập lục phân gồm 10, 26, hoặc 58 ký tự. Có tất cả bao nhiêu mật khẩu theo giao thức WEP?

Bài tập 2. Có bao nhiêu số nguyên dương giữa 100 và 999 thỏa mãn

(a) chia hết cho 7?

(b) là số lẻ?

(c) có ba chữ số thập phân giống nhau?

(d) không chia hết cho 4?

(e) chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 4?

(f) không chia hết cho cả 3 và 4?

(g) chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4?

(h) chia hết cho cả 3 và 4?

Bài tập 3. Có bao nhiêu số có 4 chữ số thỏa mãn

(a) không chứa bất kỳ hai chữ số nào giống nhau?

(b) kết thúc bởi một chữ số chẵn?

(c) có chính xác ba chữ số là 9

Bài tập 4. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 bắt đầu với 000 hoặc kết thúc với 00?

Bài tập 5. Cần chọn ít nhất bao nhiêu số từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ để chắc chắn rằng có hai số trong các số được chọn có tổng bằng 9?

Bài tập 6. Chứng minh rằng trong một nhóm 10 người có ba người đôi một quen biết nhau hoặc bốn người đôi một không quen biết nhau, và có ba người đôi một không quen biết nhau hoặc bốn người đôi một quen biết nhau.

Bài tập 7. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 thỏa mãn điều kiện

(a) có chứa chính xác bốn số 1?

(b) có chứa nhiều nhất bốn số 1?

(c) có chứa ít nhất bốn số 1?

(d) có chứa số các số 0 bằng với số các số 1?

Bài tập 8. Có bao nhiêu cách xếp n bạn nam và n bạn nữ thành một hàng dài sao cho các bạn nam và nữ đứng xen kẽ nhau? (**Gợi ý:** Thử với một số giá trị nhỏ của n.)

Bài tập 9. Có bao nhiêu hoán vị của dãy các chữ cái $ABCDEFG$ có chứa

(a) chuỗi ký tự BCD?

(b) chuỗi ký tự $CFGA$?

(c) các chuỗi ký tự BA và GF?

(d) các chuỗi ký tự ABC và DE?

Bài tập 10. Có bao nhiêu cách xếp 8 bạn nam và 5 bạn nữ thành một hàng dài sao cho không có hai bạn nữ nào đứng liền kề nhau? (**Gợi ý:** Đầu tiên tìm vị trí cho các bạn nam. Sau đó xét các vị trí có thể cho các bạn nữ.)

Bài tập 11. Giả sử có một nhóm gồm 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra một ban đại diện gồm 6 thành viên trong đó cần có số nam và nữ bằng nhau?

Bài tập 12. Sử dụng định lý nhị thức để tìm hệ số của $x^a y^b$ trong khai triển của $(2x^3 - 4y^2)^7$, với

(a) $a = 9, b = 8$

(b) $a = 8, b = 9$

(c) $a = 0, b = 14$

(d) $a = 12, b = 6$

Bài tập 13. Tìm n nếu

(a) $\binom{n}{2} = 45$

(b) $\binom{n}{5} = \binom{n}{2}$

(c) $\binom{n}{3} = P(n, 2)$

Bài tập 14. Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên dương thì

$$1 = \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \cdots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} = 1.$$

Bài tập 15. Chứng minh rằng nếu n và k là các số nguyên với $1 \leq k \leq n$ thì

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

(a) bằng cách sử dụng phương pháp đại số

(b) bằng phương pháp đếm hai lần

Bài tập 16. Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên dương thì

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$$

(a) bằng cách sử dụng phương pháp đại số

(b) bằng phương pháp đếm hai lần

Bài tập 17. Bất phương trình $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, và $x_3 \geq 0$? (**Gợi ý:** Đưa vào thêm một biến tạm thời x_4 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$.)

Bài tập 18. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn điều kiện $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và

(a) $x_1 \geq 1$?

(b) $x_i \geq 2$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

(c) $0 \leq x_1 \leq 10$?

(d) $0 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 < 4$, và $x_3 \geq 15$?

Bài tập 19. Có bao nhiêu chuỗi ký tự gồm 10 chữ số tam phân (0, 1, hoặc 2) có chứa chính xác hai số 0, ba số 1, và năm số 2?

Bài tập 20. Có bao nhiêu cách phân phối 6 quả bóng hoàn toàn giống nhau vào 9 hộp hoàn toàn khác nhau?

Bài tập 21. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1 000 000 có tổng các chữ số bằng 19?

Bài tập 22 ($\star$)**.** Có bao nhiêu cách chọn 5 ngày làm việc trong tháng Mười cho một phi công, biết rằng không thể chọn hai ngày làm việc nào liên tiếp nhau? (**Gợi ý:** Xét các khoảng thời gian phi công không làm việc. Có bao nhiêu cách chọn các khoảng thời gian này để đảm bảo điều kiện đề ra?)

Bài tập 23. Có bao nhiêu cách để phân phối 15 vật thể phân biệt vào 5 hộp phân biệt sao cho các hộp lần lượt có một, hai, ba, bốn, và năm vật thể ở trong chúng?

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Lý thuyết đồ thị I

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
`hoanganhduc@hus.edu.vn`

Bài tập 1. Vẽ các đồ thị sau

(a) K_7

(b) C_7

(c) $K_{1,8}$

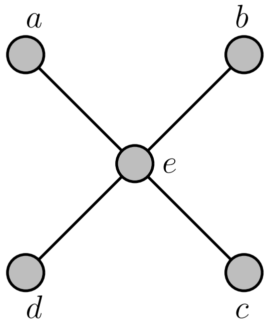
(d) W_7

(e) $K_{4,4}$

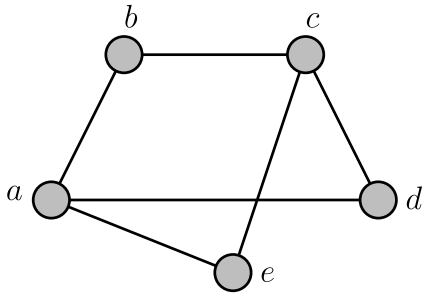
(f) Q_4

Bài tập 2. Chứng minh rằng một đơn đồ thị $G = (V, E)$ là một đồ thị hai phần khi và chỉ khi tồn tại một hàm $f : V \to \{0, 1\}$ thỏa mãn $f(u) \neq f(v)$ nếu $u \in N_G(v)$. Nói cách khác, G là đồ thị hai phần khi và chỉ khi ta có thể "tô màu" các đỉnh của đồ thị bằng hai "màu" 0 và 1 sao cho hai đỉnh kề nhau luôn có "màu" khác nhau.

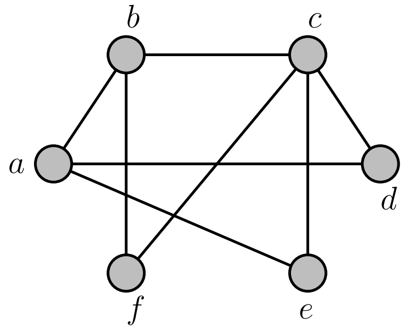
Sử dụng phát biểu trên, hãy kiểm tra xem các đồ thị sau có phải đồ thị hai phần hay không



G_1



G_2



G_3

Bài tập 3. Các đồ thị sau có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh?

(a) K_n

(b) C_n

(c) W_n

(d) $K_{m,n}$

(e) Q_n

Bài tập 4. Cho G là một đồ thị với n đỉnh và m cạnh. Gọi $\Delta(G)$ và $\delta(G)$ lần lượt là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của một đỉnh của G. Chứng minh rằng $\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$.

Bài tập 5. Một đồ thị được gọi là *đồ thị chính quy (regular graph)* nếu các đỉnh của đồ thị có cùng bậc. Ta gọi một đồ thị là n-chính quy nếu nó là đồ thị chính quy trong đó các đỉnh có cùng bậc n. Với các giá trị nào của n thì các đồ thị sau là đồ thị chính quy

(a) K_n

(b) C_n

(c) W_n

(d) Q_n

Bài tập 6. Chứng minh rằng nếu một đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$ là đồ thị chính quy thì $|V_1| = |V_2|$.

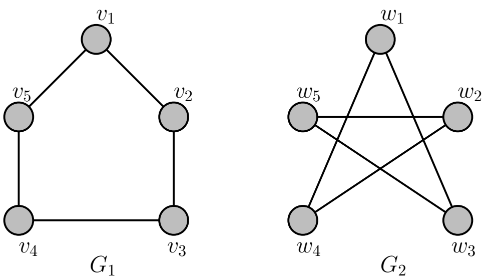
Bài tập 7. *Đồ thị bù (complement graph)* của một đồ thị G, ký hiệu $\overline{G}$, là một đồ thị có cùng tập đỉnh với G. Hai đỉnh trong $\overline{G}$ là liền kề khi và chỉ khi chúng không liền kề trong G. Hãy mô tả các đồ thị sau

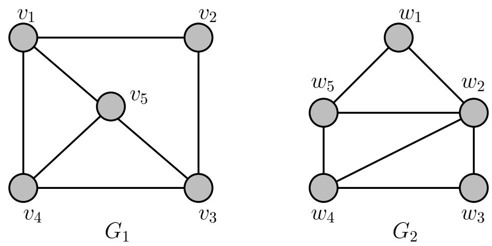
(a) $\overline{K_n}$

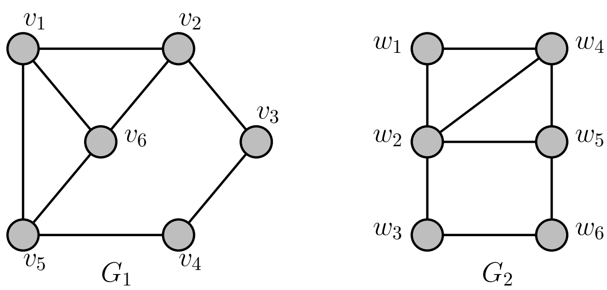
(b) $\overline{K_{m,n}}$

(c) $\overline{C_n}$

Bài tập 8. Các cặp đồ thị sau có đẳng cấu hay không? Vì sao?



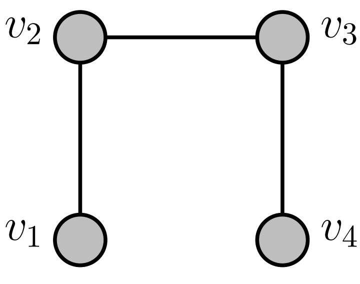




Bài tập 9. Giả sử G và H là các đơn đồ thị thỏa mãn $G \simeq H$. Chứng minh rằng $\overline{G} \simeq \overline{H}$.

Bài tập 10. Một đơn đồ thị G được gọi là *tự bù (self-complementary)* nếu $G \simeq \overline{G}$.

(a) Chứng minh rằng đồ thị sau là một đồ thị tự bù



(b) Tìm một đồ thị tự bù có 5 đỉnh.

Bài tập 11. Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Một đỉnh $w \in V$ được gọi là *hướng tới được (reachable)* từ đỉnh $v \in V(G)$ nếu tồn tại một đường đi có hướng từ v đến w. Hai đỉnh v, w là *lẫn nhau hướng tới được (mutually reachable)* nếu như w hướng tới được từ v và v hướng tới được từ w.

(a) Chứng minh rằng nếu u, v là lẫn nhau hướng tới được và v, w là lẫn nhau hướng tới được thì u, w là lẫn nhau hướng tới được.

(b) Sử dụng phần (a), chứng minh rằng nếu H và K lần lượt là các thành phần liên thông mạnh chứa u và v thì $H = K$ hoặc H và K không có đỉnh chung, trong đó u, v là các đỉnh bất kỳ.

Bài tập 12. Chứng minh rằng mỗi đồ thị sau không có đỉnh cắt

(a) C_n với $n \geq 3$

(b) W_n với $n \geq 3$

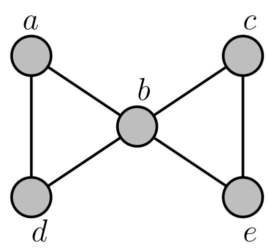
(c) $K_{m,n}$ với $m \geq 2$ và $n \geq 2$

(d) Q_n với $n \geq 2$

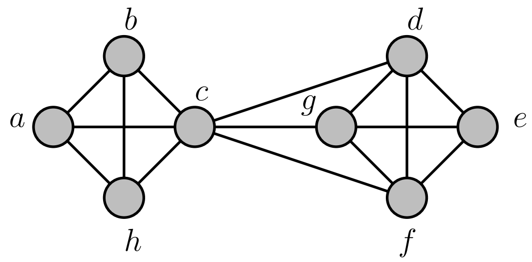
Bài tập 13. Chứng minh rằng một đồ thị vô hướng liên thông bất kỳ gồm $n \geq 1$ đỉnh có ít nhất $n - 1$ cạnh. (**Gợi ý:** Quy nạp mạnh theo số đỉnh n của đồ thị.)

Bài tập 14. Với mỗi đồ thị trong các trường hợp sau, tìm $\kappa(G), \lambda(G)$, và $\min_{v \in V} \deg(v)$.

(a)



(b)



Bài tập 15. Tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh phân biệt của K_4 với n bằng

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 5

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Với những giá trị nào của n thì các đồ thị sau có chu trình Euler?

(a) K_n

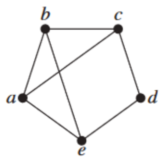
(b) C_n

(c) W_n

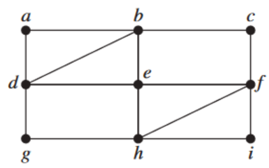
(d) Q_n

Bài tập 2. Hãy xác định xem các đồ thị sau có chu trình/đường đi Euler hay không? Nếu có, hãy tìm một chu trình/đường đi Euler trong đồ thị đó.

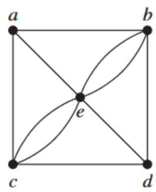
1.



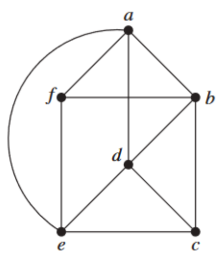
2.



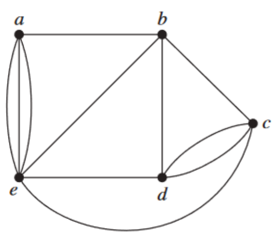
3.



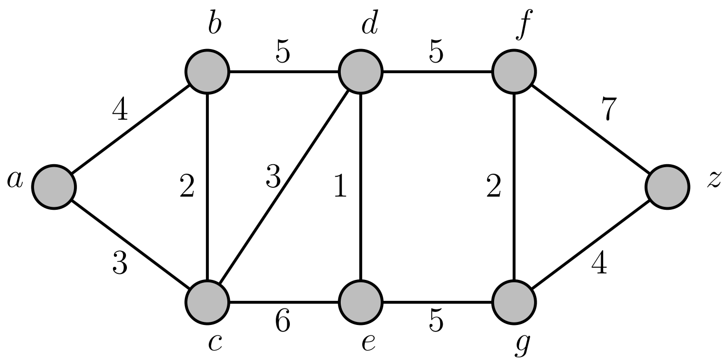
4.



5.



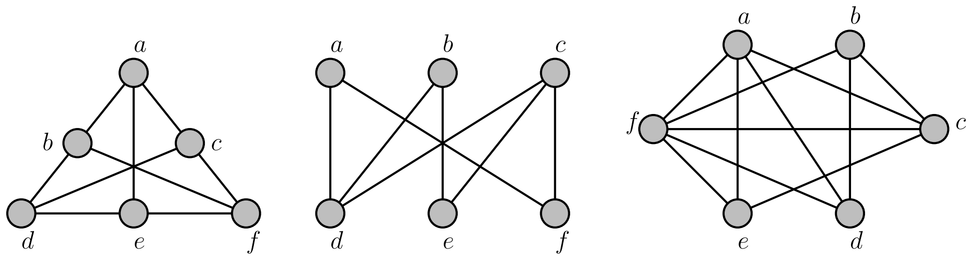
Bài tập 3. Tìm độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến z trong đồ thị sau bằng thuật toán Dijkstra.



Bài tập 4. Hãy giải thích cách tìm một đường đi có số cạnh ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị vô hướng bằng cách coi bài toán này như là một bài toán tìm đường đi ngắn nhất trong một đồ thị có trọng số.

Bài tập 5. Đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị có trọng số $G = (V, E, w)$ có phải là duy nhất hay không nếu như trọng số của các cạnh là phân biệt, nghĩa là với hai cạnh $e, f \in E$ bất kỳ thì $w(e) \neq w(f)$?

Bài tập 6. Các đồ thị sau có phải đồ thị phẳng không? Nếu đúng, hãy vẽ một biểu diễn phẳng của đồ thị đó



G_1 G_2 G_3

Bài tập 7. Giả sử một đồ thị phẳng liên thông có 8 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc 3. Một biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

Bài tập 8. Trong số các đồ thị không phẳng sau, đồ thị nào thỏa mãn điều kiện sau: nếu bỏ đi một đỉnh bất kỳ và các cạnh liên thuộc với đỉnh đó thì ta thu được một đồ thị phẳng.

(a) K_5

(b) K_6

(c) $K_{3,3}$

(d) $K_{3,4}$

Bài tập 9. Những đồ thị nào có sắc số bằng 1?

Bài tập 10. Một cách tô màu các cạnh của một đồ thị $G = (V, E)$ bằng k màu (k-edge coloring) là một hàm $f : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ thỏa mãn điều kiện $f(e) \neq f(e')$ nếu e và e' liên thuộc với cùng một đỉnh. Sắc số cạnh (edge chromatic number) của một đồ thị G, ký hiệu $\chi'(G)$, là số màu nhỏ nhất có thể dùng để tô màu các cạnh của G

(a) Tìm $\chi'(C_n)$ và $\chi'(W_n)$ với $n \geq 3$.

(b) Chứng minh rằng $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, trong đó $\Delta(G)$ là bậc lớn nhất của một đỉnh của G.

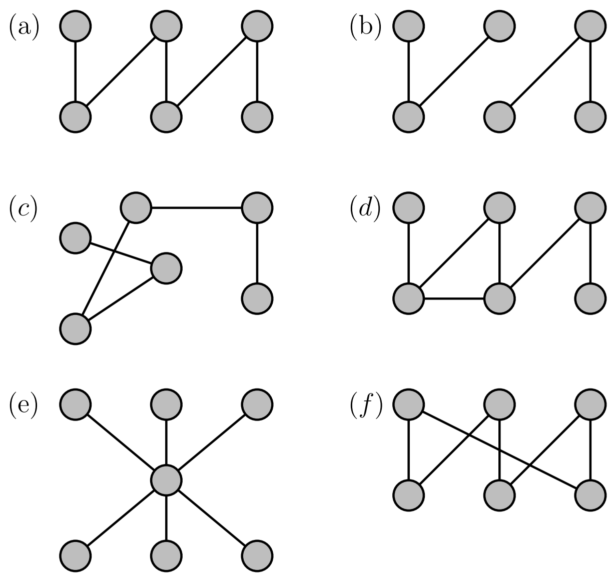
VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Lý thuyết đồ thị III

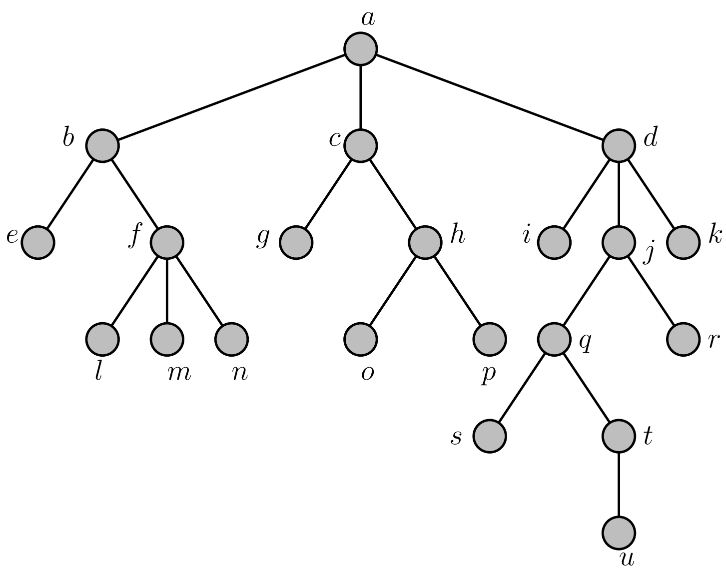
Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Đồ thị nào trong các đồ thị sau là cây?



Bài tập 2. Hãy trả lời các câu hỏi về cây có gốc được minh họa như hình vẽ dưới đây



(a) Đỉnh nào đỉnh gốc?

(b) Các đỉnh nào là đỉnh trong?

(c) Các đỉnh nào là đỉnh lá?

(d) Các đỉnh nào là đỉnh con của j?

(e) Đỉnh nào là đỉnh gốc của h?

(f) Các đỉnh nào là đỉnh anh em của o?

(g) Các đỉnh nào là đỉnh tổ tiên của m?

(h) Các đỉnh nào là đỉnh con cháu của b?

(i) Mức của mỗi đỉnh trong cây là bao nhiêu?

(j) Vẽ cây con gốc c và cây con gốc e.

Bài tập 3. Các đồ thị hai phần đầy đủ $K_{m,n}$ nào là cây, trong đó m, n là các số nguyên dương?

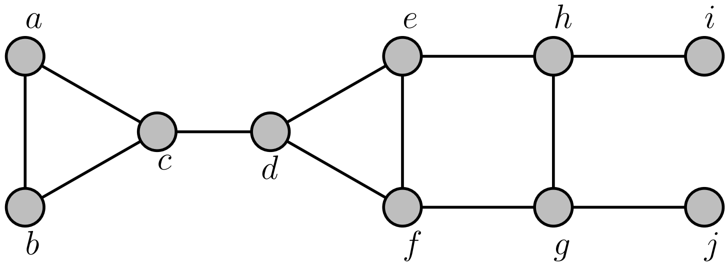
Bài tập 4. Một rừng bao gồm n đỉnh và t cây (mỗi cây là một thành phần liên thông của rừng) có bao nhiêu cạnh?

Bài tập 5. Tìm một cây bao trùm của đồ thị sau bằng

(1) thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu (DFS);

(2) thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng (BFS);

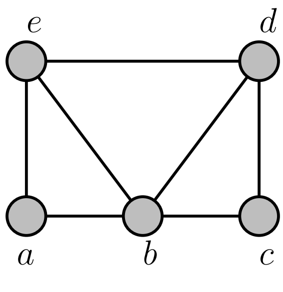
bắt đầu từ đỉnh a.



Bài tập 6. Giải thích cách sử dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu hoặc tìm kiếm theo chiều rộng để xây dựng một dãy sắp thứ tự các đỉnh trong một đồ thị liên thông.

Bài tập 7. Hãy mô tả các cây xuất ra bởi thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng và thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu khi chạy trên đồ thị đầy đủ K_n, với n là số nguyên dương nào đó.

Bài tập 8. Có những bài toán chỉ có thể giải được bằng cách tìm kiếm trên tập toàn bộ các lời giải. Để tiến hành tìm kiếm lời giải một cách có hệ thống, một hướng tiếp cận là sử dụng cây quyết định với mỗi đỉnh trong mô tả một quyết định và mỗi đỉnh lá ứng với một lời giải nào đó. Trong *kỹ thuật quay lui (backtracking)*, để tìm kiếm lời giải mong muốn, đầu tiên ta tiến hành một dãy các quyết định sao cho ta có thể tìm đến các lời giải ở càng xa đỉnh gốc càng tốt. Một dãy các quyết định này tương ứng với một đường đi trong cây quyết định từ gốc đến lá. Một khi ta biết rằng không thể tìm đến một lời giải mới xa hơn thông qua dãy các quyết định, ta lui lại xét đỉnh cha của đỉnh đang xét hiện tại, và tiếp tục tìm đến một lời giải khác dựa trên một dãy các quyết định mới nếu có thể. Quá trình này được lặp lại cho đến khi tìm được lời giải mong muốn hoặc kết luận rằng không có lời giải nào như thế tồn tại.

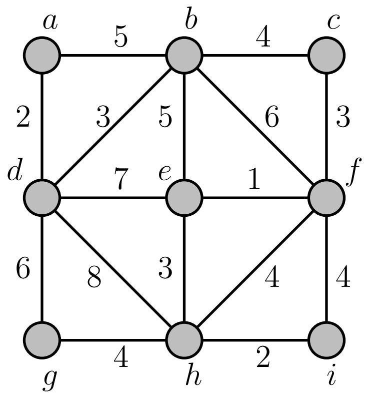


Hãy tô màu đồ thị trên bằng 3 màu đỏ (R), xanh lá cây (G), và xanh da trời (B) dựa trên kỹ thuật quay lui đã mô tả. (**Gợi ý:** Xem Mục 11.4.4 trong sách của Rosen.)

Bài tập 9. Đơn đồ thị vô hướng liên thông nào có chính xác một cây bao trùm?

Bài tập 10. Khi nào thì một cạnh của một đơn đồ thị vô hướng liên thông phải thuộc mọi cây bao trùm của đồ thị đó?

Bài tập 11. Tìm một cây bao trùm nhỏ nhất của đồ thị sau bằng cách sử dụng



(a) thuật toán Prim

(b) thuật toán Kruskal

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Đại số Boole

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Lập bảng giá trị của các hàm Boole sau:

(a) $F(x, y, z) = x\bar{y}z + \overline{xyz}$

(b) $F(x, y, z) = x(yz + \bar{y}\bar{z})$

Bài tập 2. Biểu diễn mỗi hàm ở Bài tập 1 trên một khối lập phương Q_3 bằng cách đánh dấu các đỉnh tại đó hàm đạt giá trị 1.

Bài tập 3. Tìm một biểu diễn của hàm Boole $F(x, y, z)$ biết rằng F nhận giá trị 1 khi và chỉ khi:

(a) có đúng 2 trong 3 biến x, y, z nhận giá trị 1.

(b) có một số chẵn biến nhận giá trị 1.

Bài tập 4. Tìm biểu diễn dưới dạng tổng của các tiểu hạng (minterm) của các hàm sau:

1. $F(x, y, z) = (x + \bar{z})y$
2. $F(x, y, z) = x\bar{y} + y\bar{z}$

Bài tập 5. Sử dụng luật De Morgan, ta có thể biểu diễn phép toán $+$ theo hai phép toán $\cdot$ và $\bar{\ }$, từ đó có thể biểu diễn mọi hàm Boole bằng một biểu thức chỉ chứa hai phép toán đó. Hãy tìm một biểu diễn như vậy của các hàm sau:

1. $F(x, y) = x + y$
2. $F(x, y, z) = \bar{x}(x + \bar{y}) + z$

Bài tập 6. Tương tự bài trước, ta cũng có thể biểu diễn mọi hàm Boole bằng một biểu thức chỉ chứa hai phép toán $+$ và $\bar{\ }$. Tìm một biểu diễn như vậy của các hàm sau:

1. $F(x, y) = \overline{xy}$
2. $F(x, y, z) = x + \bar{y}(\bar{x} + z)$

Bài tập 7. Rút gọn các biểu thức sau bằng cách sử dụng sơ đồ Karnaugh:

1. $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$
2. $xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$
3. $wxyz + wx\bar{y}z + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}z$

Bài tập 8. Rút gọn các biểu thức trong bài tập trước bằng phương pháp Quine-McCluskey.