VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Quy nạp và Đệ quy

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Quy nạp toán học

- Giới thiệu
- Quy nạp yếu
- Quy nạp mạnh
- Một số chứng minh quy nạp sai

Đệ quy

- Định nghĩa và một số khái niệm
- Hàm định nghĩa bằng đệ quy
- Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy
- Quy nạp theo cấu trúc

Quy nạp toán học
Giới thiệu

- *Quy nạp toán học (mathematical induction)* là một kỹ thuật chứng minh cực kỳ quan trọng
- Quy nạp toán học được sử dụng để chứng minh các kết quả về những đối tượng rời rạc khác nhau
  - độ phức tạp của thuật toán
  - tính đúng đắn của một số chương trình máy tính
  - các định lý về đồ thị và cây
- Ta sẽ giới thiệu một số dạng quy nạp toán học
  - *Quy nạp toán học yếu (Weak Mathematical Induction)*, hay còn gọi là *Nguyên lý Thứ nhất của Quy nạp toán học (The First Principle of Mathematical Induction)*
  - *Quy nạp toán học mạnh (Strong Mathematical Induction)* hay còn gọi là *Nguyên lý Thứ hai của Quy nạp toán học (The Second Principle of Mathematical Induction)*
- Tính đúng đắn của phương pháp quy nạp bắt nguồn từ

Tiên đề 1: Tính chất sắp thứ tự tốt

Mọi tập con khác rỗng của tập các số nguyên dương có một phần tử nhỏ nhất

Nguyên lý quy nạp yếu

Để *chứng minh* $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$, chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step):* Chỉ ra mệnh đề $P(1)$ đúng
- *Bước quy nạp (inductive step):* Chứng minh mệnh đề $P(k) \to P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên dương k
  - Giả thiết $P(k)$ đúng, chứng minh $P(k+1)$ đúng
  - Giả thiết $P(k)$ đúng được gọi là *giả thiết quy nạp (inductive hypothesis hoặc induction hypothesis)*

Theo ngôn ngữ lôgic,

$$(P(1) \land \forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (P(k) \to P(k+1))) \to \forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$$

- Chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng phương pháp quy nạp
  (1) *Bước cơ sở:* Chứng minh $P(1)$ đúng
  (2) *Bước quy nạp:* Chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$. Theo định nghĩa của toán tử lôgic "$\rightarrow$", ta cần chứng minh rằng *$P(k+1)$ không thể sai khi $P(k)$ đúng*. Điều này có thể được thực hiện bằng cách *giả thiết là $P(k)$ đúng và chứng minh rằng với giả thiết đó $P(k+1)$ cũng đúng*.
    - Chú ý rằng ở đây *ta không giả thiết $P(k)$ đúng với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$*.
- Sau khi hoàn thành bước cơ sở và bước quy nạp:
  - Từ bước cơ sở, ta biết rằng $P(1)$ đúng
  - Từ bước quy nạp và $P(1)$ đúng, ta biết rằng $P(2)$ đúng
  - Từ bước quy nạp và $P(2)$ đúng, ta biết rằng $P(3)$ đúng
  - ...
  - Từ bước quy nạp và $P(n-1)$ đúng, ta biết rằng $P(n)$ đúng (với bất kỳ số nguyên dương n)

5

Một số cách minh họa phương pháp quy nạp

- *Bí mật mọi người biết:* Ta giả sử mọi người xếp thành một hàng dài vô tận và được đánh số $1, 2, \dots, k, \dots$ Để thuyết phục ai đó rằng mọi người đều biết một bí mật, bạn có thể lý luận rằng
  - Người thứ nhất biết bí mật
  - Nếu người thứ k biết bí mật, thì anh/cô ấy nói cho người thứ $k+1$ bí mật đó
- *Hiệu ứng đôminô:* Ta có một hàng dài vô tận các quân bài đôminô đánh số $1, 2, \dots, k, \dots$ Để thuyết phục ai đó rằng quân bài thứ k sẽ đổ, bạn có thể lý luận rằng
  - Quân bài thứ nhất đổ, và
  - Bất kể khi nào một quân bài đổ, quân bài ngay tiếp theo nó cũng đổ

Chứng minh (Quy nạp yếu là đúng).

- Giả sử $P(1)$ đúng và với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$, $P(k) \to P(k+1)$ đúng. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng phản chứng
- Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $P(n)$ sai. Do đó, tập $S = \{n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } P(n) \text{ sai}\} \subseteq \mathbb{Z}^+$ là tập khác rỗng.
- Theo Tiên đề 1, S có một phần tử nhỏ nhất m. Do $P(1)$ đúng, $m \neq 1$ và do đó $m > 1$, suy ra $m - 1 \in \mathbb{Z}^+$
- Do $m - 1 < m$, $m - 1 \notin S$, và do đó $P(m-1)$ đúng
- Do $P(k-1) \to P(k)$ đúng với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$, ta có $P(m-1) \to P(m)$ đúng.
- Kết hợp với $P(m-1)$ đúng, ta có $P(m)$ đúng. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của m. Do đó $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n

$\square$

Khi sử dụng quy nạp toán học, không nhất thiết cần bắt đầu với $P(1)$ ở bước cơ sở

Nguyên lý quy nạp yếu (tổng quát)

Để *chứng minh $\forall n \geq b\, P(n)$ với $n \in \mathbb{Z}$ và b là số nguyên cho trước*, chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step):* Chỉ ra mệnh đề $P(b)$ đúng
- *Bước quy nạp (inductive step):* Chứng minh mệnh đề $P(k) \to P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq b$

Theo ngôn ngữ lôgic,

$$(P(b) \land \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b}\, (P(k) \to P(k+1))) \to \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b}\, P(n),$$

trong đó $\mathbb{Z}^{\geq b} = \{m \mid m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \geq b\}$ (chú ý là $\mathbb{Z}^{\geq 1} = \mathbb{Z}^{+}$)

Bài tập 1

*Chứng minh nguyên lý quy nạp yếu tổng quát là đúng. (**Gợi ý:** Đặt $Q(n-b+1) = P(n)$. Ta có $\forall n \geq b\, P(n) \equiv \forall n \geq 1\, Q(n)$)*

(1) Mô tả điều cần chứng minh dưới dạng "với mọi $n \geq b$, $P(n)$" với b là số nguyên cố định nào đó
- "$P(n)$ với mọi số nguyên dương n" $\Rightarrow$ chọn $b = 1$
- "$P(n)$ với mọi số nguyên không âm n" $\Rightarrow$ chọn $b = 0$
- Với một số phát biểu, cần xác định giá trị phù hợp của b bằng cách kiểm tra giá trị chân lý của $P(n)$ với một số giá trị nhỏ của n

(2) Viết cụm từ "Bước cơ sở." Sau đó chỉ ra $P(b)$ là đúng. Hãy cẩn thận chọn đúng giá trị của b

(3) Viết cụm từ "Bước quy nạp." và phát biểu một cách rõ ràng giả thiết quy nạp dưới dạng "Giả sử rằng $P(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq b$ nào đó"

(4) Phát biểu điều cần chứng minh với giả thiết $P(k)$ đúng, nghĩa là, phát biểu cụ thể $P(k+1)$

(5) Chứng minh $P(k+1)$ đúng sử dụng giả thiết $P(k)$ đúng

(6) Xác định rõ ràng phần kết của bước quy nạp, ví dụ như bằng cách viết "Bước quy nạp đến đây là hoàn tất."

(7) Sau khi hoàn thành bước cơ sở và bước quy nạp, phát biểu kết luận "Bằng phương pháp quy nạp, ta đã chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên n thỏa mãn $n \geq b$."

- Quy nạp toán học có thể được sử dụng để chứng minh một giả thuyết khi giả thuyết này đã được thành lập (và đúng). Tuy nhiên, quy nạp toán học *không cung cấp ý tưởng giải thích tại sao các định lý lại đúng*
- Việc *kiểm tra phát biểu cần chứng minh với một số giá trị nhỏ của n* trước khi đi vào chứng minh có thể rất hữu ích. Thông thường, các ví dụ nhỏ có thể giúp ta nhận ra các khía cạnh dễ nhầm lẫn của phát biểu hoặc nhận ra tại sao phát biểu lại đúng trong trường hợp tổng quát
- Thông thường, bước chứng minh $P(k+1)$ với giả thiết $P(k)$ là bước khó nhất trong toàn bộ chứng minh quy nạp. Hãy *chắc chắn rằng chứng minh của bạn đúng với mọi $k \geq b$*, nhất là với các giá trị nhỏ của k, thậm chí là cả $k = b$
- Nếu bạn *không sử dụng giả thiết $P(k)$ trong chứng minh $P(k+1)$*, thì có thể có điều gì đó sai, hoặc ít nhất chứng minh của bạn không thực sự là chứng minh quy nạp

Ví dụ 1

Ta chứng minh phát biểu $P(n)$ sau đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Bước cơ sở.** $P(1)$ đúng, do vế trái bằng 1 và vế phải bằng $\frac{1(1+1)}{2} = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) && \text{tách tổng} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{giả thiết quy nạp} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Ví dụ 2

Ta chứng minh phát biểu $P(n)$ sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \text{ với số thực } r \neq 1 \text{ bất kỳ cho trước}$$

- **Bước cơ sở.** $P(0)$ đúng, do vế trái bằng 1 và vế phải bằng $\frac{r^1 - 1}{r - 1} = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq 0$ nào đó, nghĩa là $\sum_{i=0}^{k} r^i = \frac{r^{k+1}-1}{r-1}$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là $\sum_{i=0}^{k+1} r^i = \frac{r^{k+2}-1}{r-1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} r^i &= \sum_{i=0}^{k} r^i + r^{k+1} && \text{tách tổng} \\
&= \frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} + r^{k+1} && \text{giả thiết quy nạp} \\
&= \frac{r^{k+2} - 1}{r - 1}
\end{aligned}$$

Ví dụ 3

Ta chứng minh phát biểu $Q(n)$ sau đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$

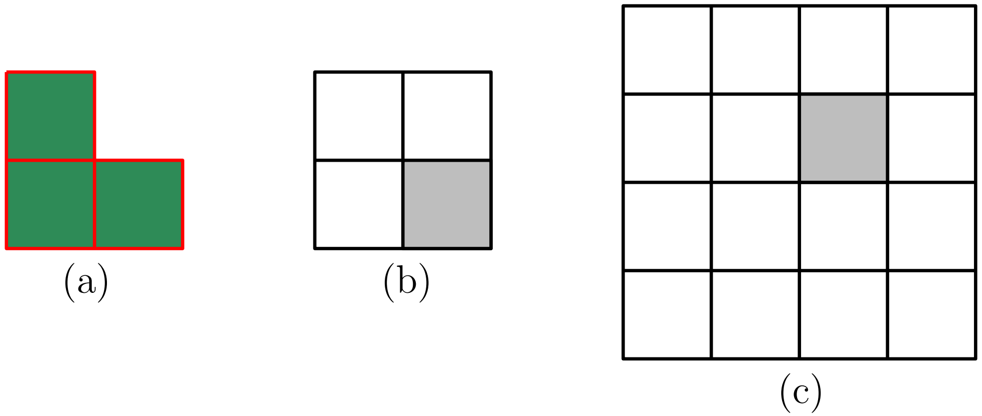
$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n \text{ với mọi tập hợp } A \text{ thỏa mãn } |A| = n$$

- **Bước cơ sở.** $Q(0)$ đúng ví $A = \emptyset$ là tâp duy nhất thỏa mãn $|A| = 0$ và ta có vế trái $|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1$ bằng với vế phải $2^0 = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử $Q(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq 0$ nào đó, nghĩa là $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$ với mọi tập hợp A thỏa mãn $|A| = k$. Ta chứng minh $Q(k+1)$ đúng, nghĩa là $|\mathcal{P}(B)| = 2^{k+1}$ với mọi tập hợp B thỏa mãn $|B| = k+1$. Thật vậy, giả sử B là một tập hợp có $k+1$ phần tử. Gọi x là phần tử bất kỳ của B và đặt $C = B - \{x\}$. Chú ý rằng nếu D là một tập con của B thì hoặc D cũng là một tập con của C nếu $x \notin D$, hoặc D là hợp của một tập con của $C \cup \{x\}$ nếu $x \in D$. Do đó $|\mathcal{P}(B)| = 2|\mathcal{P}(C)|$, và theo giả thiết quy nạp $|\mathcal{P}(C)| = 2^k$. Suy ra $|\mathcal{P}(B)| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để giải các bài tập sau

Bài tập 2

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$*, ta có thể phủ kín bàn cờ không hoàn chỉnh kích thước* $2^n \times 2^n$ *với một ô vuông bị loại bỏ bằng các khối hình chữ* ***L*** *như trong hình dưới đây sao cho không có hai khối nào chồng lên nhau*



Hình: *Phủ kín các bàn cờ, ví dụ như (b) hoặc (c), bằng các khối hình chữ* ***L*** *như ở (a)*

(Bạn có thể thử phủ kín bàn cờ 8×8 *ở https://nstarr.people.amherst.edu/puzzle.html)*

Hãy sử dụng phương pháp quy nạp để giải các bài tập sau

Bài tập 3

Chứng minh với mọi số nguyên $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ 0 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Bài tập 4

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 4$, ta có $2^n \geq n^2$

Bài tập 5

*Chứng minh rằng với mọi số nguyên n "đủ lớn", ta có $2^n \geq n^3$ (**Gợi ý:** Với bài tập này, trước tiên bạn cần tìm được một số nguyên b và chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng với mọi $n \geq b$)*

Bài tập 6

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, các tập $A_1, A_2, \dots, A_n$ thỏa mãn $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$

Nguyên lý quy nạp mạnh

Để *chứng minh* $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$, chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step):* Chỉ ra mệnh đề $P(1)$ đúng
- *Bước quy nạp (inductive step):* Chứng minh mệnh đề $(P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(k)) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên dương k
  - Giả thiết $P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(k)$ đúng, chứng minh $P(k+1)$ đúng
  - Giả thiết $P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(k)$ đúng được gọi là *giả thiết quy nạp*

Theo ngôn ngữ lôgic,

$$(P(1) \land \forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (\bigwedge_{j=1}^{k} P(j) \rightarrow P(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n),$$

trong đó $\bigwedge_{j=1}^{k} P(j) = P(1) \land P(2) \land \cdots \land P(k)$

Tương tự như với quy nạp yếu, ở bước cơ sở ta không nhất thiết cần bắt đầu từ $P(1)$

Nguyên lý quy nạp mạnh (tổng quát)

Để *chứng minh* $\forall n \geq b\, P(n)$ *với* $n \in \mathbb{Z}$ *và* b *là số nguyên cho trước*, chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step):* Chỉ ra mệnh đề $P(b)$ đúng
- *Bước quy nạp (inductive step):* Chứng minh mệnh đề $(P(b) \land P(b+1) \land \cdots \land P(k)) \to P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq b$

Theo ngôn ngữ lôgic,

$$(P(b) \land \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b} (\bigwedge_{j=b}^{k} P(j) \to P(k+1))) \to \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b} P(n)$$

Bài tập 7

Tương tự như Bài tập 1, hãy chứng minh nguyên lý quy nạp mạnh trên là đúng

Thêm vào đó, thay vì chỉ chứng minh $P(b)$ đúng, ta có thể làm nhiều hơn ở bước cơ sở

Nguyên lý quy nạp mạnh (tổng quát)

Để *chứng minh $\forall n \geq b\, P(n)$ với $n \in \mathbb{Z}$ và b là số nguyên cho trước*, chúng ta thực hiện hai bước

- *Bước cơ sở (basis step):* Chỉ ra các mệnh đề $P(b)$, $P(b+1), \dots, P(b+j)$ đúng, với j là một số nguyên dương cố định nào đó
- *Bước quy nạp (inductive step):* Chứng minh mệnh đề $(P(b) \wedge P(b+1) \wedge \cdots \wedge P(k)) \to P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq b+j$

Theo ngôn ngữ lôgic,

$$\left(\bigwedge_{i=0}^{j} P(b+i) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^{\geq b+j} \left(\bigwedge_{i=b}^{k} P(i) \to P(k+1)\right)\right) \to \forall n \in \mathbb{Z}^{\geq b}\, P(n)$$

- Về mặt hình thức, quy nạp mạnh và quy nạp yếu *khác nhau ở giả thiết quy nạp*: ở quy nạp yếu ta chỉ giả thiết $P(k)$ đúng, còn ở quy nạp mạnh ta giả thiết tất cả các mệnh đề $P(1), P(2), \dots, P(k)$ đều đúng
- *Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương về mặt lôgic*, nghĩa là, quy nạp yếu đúng khi và chỉ khi quy nạp mạnh cũng đúng
- Nếu bạn có thể trực tiếp chứng minh $P(k+1)$ với giả thiết $P(k)$ đúng, *nên dùng quy nạp yếu*
- Ngược lại, nếu bạn có thể chứng minh $P(k+1)$ từ giả thiết $P(j)$ đúng với mọi $j \leq k$, nhưng không rõ làm sao để trực tiếp chứng minh $P(k) \to P(k+1)$, *nên dùng quy nạp mạnh*

Ví dụ 4

Cho $P(n)$ là vị từ xác định trên miền $\mathbb{Z}^{\geq 2}$ như sau

n có thể được biểu diễn dưới dạng tích của các số nguyên tố

Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 2}\ P(n)$ bằng phương pháp quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở.** $P(2)$ đúng, vì 2 có thể được biểu diễn dưới dạng tích của một số nguyên tố—chính nó
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(j)$ đúng với mọi số nguyên j thỏa mãn $2 \leq j \leq k$ với $k \geq 2$ là số nguyên cố định nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy,
  - Nếu $k+1$ là số nguyên tố, $P(k+1)$ đúng do $k+1$ có thể được biểu diễn dưới dạng tích của một số nguyên tố—chính nó
  - Nếu $k+1$ là hợp số, ta có thể biểu diễn $k+1 = ab$ với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $2 \leq a \leq b < k+1$. Theo giả thiết quy nạp, cả a và b đều có thể được biểu diễn dưới dạng tích của các số nguyên tố, và do đó $k+1$ cũng thế

Ví dụ 5

Cho vị từ $P(n)$ với $n \in \mathbb{Z}^{\geq 12}$

$$n = 4a + 5b \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}$$

Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 12}\ P(n)$ bằng phương pháp quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở.** Ta chứng minh $P(12), P(13), P(14), P(15)$ đều đúng. Thật vậy, $12 = 4 \cdot 3$, $13 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1$, $14 = 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2$, và $15 = 5 \cdot 3$
- **Bước quy nạp.** Giả sử với mọi số nguyên cố định $k \geq 15$ bất kỳ, $P(m)$ đúng với mọi số nguyên m thỏa mãn $12 \leq m \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, do $k \geq k - 3 \geq 12$, theo giả thiết quy nạp, ta có $P(k-3)$ đúng, nghĩa là tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}^{+}$ sao cho $k - 3 = 4a + 5b$. Suy ra $k + 1 = (k-3) + 4 = 4(a+1) + 5b$

Bài tập 8

Chứng minh ví dụ trên bằng quy nạp yếu

Bài tập 9

Gọi $P(n)$ là vị từ $n = 3a + 5b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Bài tập này mô tả cách chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 8$ bằng phương pháp quy nạp mạnh

(a) *Để hoàn thành bước cơ sở, hãy chứng minh rằng các mệnh đề $P(8)$, $P(9)$, và $P(10)$ là đúng*

(b) *Giả thiết quy nạp là gì?*

(c) *Trong bước quy nạp, bạn cần chứng minh điều gì?*

(d) *Hãy hoàn thành bước quy nạp cho $n \geq 10$*

(e) *Giải thích tại sao những bước trên cho thấy rằng $P(n)$ đúng với mọi $n \geq 8$*

Bài tập 10

Chỉ sử dụng các tờ tiền mệnh giá 20000 VND và 50000 VND, các bạn có thể tạo thành cọc tiền có những giá trị như thế nào? Hãy chứng minh câu trả lời của bạn bằng phương pháp quy nạp mạnh

Ví dụ 6 ([Gunderson and Rosen 2010])

Cho $P(n)$ là $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+\frac{1}{2})^2}{2}$. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ bằng phương pháp quy nạp

- **Bước cơ sở.** $P(1)$ đúng do $\frac{(1+\frac{1}{2})^2}{2} = 1$
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq 1$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) \\
&= \frac{(k+\frac{1}{2})^2}{2} + (k+1) \qquad \text{giả thiết quy nạp} \\
&= \frac{(k+\frac{1}{2})^2 + 2(k+\frac{1}{2}) + 1}{2} \\
&= \frac{(k+1+\frac{1}{2})^2}{2}
\end{aligned}
$$

Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?

Ví dụ 7 ([Gunderson and Rosen 2010])

Để chứng minh *mọi số nguyên dương đều bằng nhau*, bước đầu tiên ta xét

$$P(n) := \text{“}\textit{Nếu } n = \max\{a, b\} \textit{ với } a, b \in \mathbb{Z}^+ \textit{ thì } a = b\text{”}$$

Nếu $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, thì với mọi $x, y \in \mathbb{Z}^+$, ta chọn $n = \max\{x, y\}$ và theo $P(n)$ ta có $x = y$. Do đó mọi số nguyên dương đều bằng nhau. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ bằng phương pháp quy nạp

- **Bước cơ sở.** Với $n = 1$, ta có $\max\{a, b\} = 1$ và $a, b \in \mathbb{Z}^+$, do đó $a = b = 1$, suy ra $P(1)$ đúng.
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(k)$ đúng với một số nguyên cố định $k \geq 1$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng

Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?

Thật vậy, giả sử hai số $c, d \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $\max\{c, d\} = k + 1$. Do đó, $\max\{c - 1, d - 1\} = k$. Theo giả thiết quy nạp, $c - 1 = d - 1$, và do đó $c = d$

Ví dụ 8 (Tất cả ngựa đều cùng màu)

$P(n) :=$ "*Bất kỳ n con ngựa nào đều có cùng màu sắc*"

Thật vậy, ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng phương pháp quy nạp

- **Bước cơ sở.** $P(1)$ hiển nhiên đúng.
- **Bước quy nạp.** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ cố định nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Giả sử có $k+1$ con ngựa $H_1, H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$. Theo giả thiết quy nạp, $H_1, H_2, \dots, H_k$ đều có cùng màu sắc. Cũng theo giả thiết quy nạp, $H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$ đều có cùng màu sắc. Do đó, $H_1, H_2, \dots, H_k, H_{k+1}$ đều có cùng màu sắc

$$H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4$$

Câu hỏi

Chứng minh này sai ở đâu?

- Trong *quy nạp*, ta chứng minh mọi phần tử của một tập vô hạn thỏa mãn vị từ P nào đó bằng cách
  - chứng minh tính đúng đắn của P cho các phần tử lớn hơn trong tập hợp dựa vào tính đúng đắn của các phần tử nhỏ hơn
- Trong các *định nghĩa đệ quy (recursive definition)*, tương tự, ta định nghĩa một cấu trúc (hàm, vị từ, tập hợp, hay một cấu trúc nào đó phức tạp hơn) trên một miền vô hạn nào đó (miền xác định) bằng cách
  - định nghĩa cấu trúc của các phần tử lớn hơn dựa vào cấu trúc của các phần tử nhỏ hơn

Đệ quy
Hàm định nghĩa bằng đệ quy

- *Hàm định nghĩa bằng đệ quy (recursive function)*
  $f : \mathbb{N} \to A$ với tập A bất kỳ
  - *Bước cơ sở (basis step):* Định nghĩa một số giá trị ban đầu $f(0), f(1), \dots, f(b)$ với số nguyên cố định $b \geq 0$ nào đó
  - *Bước đệ quy (recursive step):* Định nghĩa một quy luật để tìm giá trị của $f(n)$ từ các giá trị $f(n-1)$, $f(n-2)$, $\dots$, $f(n-b)$, $f(n-b-1)$ với mọi $n > b$

Ví dụ 9

Định nghĩa một dãy bằng hệ thức truy hồi

- Dãy Fibonacci $\{f_n\}$
  - **Bước cơ sở:** $f_0 = 0$, $f_1 = 1$
  - **Bước đệ quy:** $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$
- Dãy giai thừa $\{g_n\}$
  - **Bước cơ sở:** $g_0 = 1$
  - **Bước đệ quy:** $g_n = n g_{n-1}$ $(n \geq 1)$

Ví dụ 10 (Chứng minh tính chất của hàm sử dụng định nghĩa đệ quy)

Cho dãy Fibonacci $\{f_n\}$. Ta chứng minh $f_n < 2^n$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$ bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở:** $f_0 = 0 < 2^0 = 1$ và $f_1 = 1 < 2^1 = 2$ (sử dụng các định nghĩa ở bước cơ sở của định nghĩa đệ quy)
- **Bước quy nạp:** Giả sử với mọi i thỏa mãn $1 \leq i \leq k$, ta có $f_i < 2^i$. Ta chứng minh $f_{k+1} < 2^{k+1}$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\ &< 2^k + 2^{k-1} && \text{giả thiết quy nạp} \\ &< 2^k + 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

Ví dụ 11 (Chứng minh tính chất của hàm sử dụng định nghĩa đệ quy)

Cho dãy Fibonacci $\{f_n\}$. Ta chứng minh $f_n > \alpha^{n-2}$ *với mọi số tự nhiên* $n \geq 3$ *và* $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$ bằng quy nạp mạnh

- **Bước cơ sở:** Với $n = 3$, ta có $f_3 = 2 > \alpha^{3-2} = \alpha$. Với $n = 4$, ta có $f_4 = 3 > \alpha^{4-2} = \alpha^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = \alpha + 1 \approx 2.61803$
- **Bước quy nạp:** Giả sử với mọi i thỏa mãn $3 \leq i \leq k$ ta có $f_i > \alpha^{i-2}$. Ta chứng minh $f_{k+1} > \alpha^{k-1}$. Thật vậy,

$$
\begin{aligned}
f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\
&> \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} && \text{giả thiết quy nạp} \\
&= \alpha^{k-3}(\alpha + 1) \\
&= \alpha^{k-3}\alpha^2 = \alpha^{k-1} && \text{do } \alpha^2 = \alpha + 1
\end{aligned}
$$

Đệ quy

Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy

- *Tập hợp định nghĩa bằng đệ quy (recursive set)*
  - *Bước cơ sở (basis step):* Định nghĩa một tập con các phần tử ban đầu
  - *Bước đệ quy (recursive step):* Định nghĩa một quy luật để tìm phần tử mới trong tập từ các phần tử đã biết là thuộc tập đó
- Thông thường, với các tập định nghĩa bằng đệ quy, *quy tắc ngoại trừ (exclusion rule)* sau luôn được áp dụng: tập hợp cần định nghĩa chỉ chứa các phần tử liệt kê ở bước cơ sở và các phần tử thu được bằng cách áp dụng quy tắc ở bước đệ quy.

Ví dụ 12

- Tập S các số nguyên dương chia hết cho 3
  - **Bước cơ sở:** $3 \in S$
  - **Bước đệ quy:** Nếu $x \in S$ và $y \in S$ thì $x + y \in S$
  - Đầu tiên, $3 \in S$, sau đó là $3 + 3 = 6$, $3 + 6 = 9$, v.v...
- Tập số tự nhiên $\mathbb{N}$
  - **Bước cơ sở:** $0 \in \mathbb{N}$
  - **Bước đệ quy:** Nếu $n \in \mathbb{N}$ thì $n + 1 \in \mathbb{N}$
- Tập các chuỗi ký tự Σ^* sinh bởi bảng chữ cái Σ
  - **Bước cơ sở:** $\lambda \in \Sigma^*$ (λ là chuỗi rỗng không chứa bất kỳ ký tự nào)
  - **Bước đệ quy:** Nếu $w \in \Sigma^*$ và $x \in \Sigma$ thì $wx \in \Sigma^*$
  - Ví dụ nếu $\Sigma = \{0, 1\}$ thì
    - $\lambda \in \Sigma^*$ (bước cơ sở)
    - $\{0, 1\} \subseteq \Sigma^*$ (lần đầu áp dụng bước quy nạp)
    - $\{00, 01, 10, 11\} \subseteq \Sigma$ (lần thứ hai áp dụng bước quy nạp)
    - v.v...
    - Do đó Σ^* là tập tất cả các chuỗi nhị phân

Ví dụ 13

- Tập *các công thức được tạo đúng quy tắc (well-formed formulae)* trong lôgic mệnh đề
  - **Bước cơ sở:** $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$, và mệnh đề nguyên tử s là các công thức được tạo đúng quy tắc
  - **Bước đệ quy:** Nếu A và B là các công thức được tạo đúng quy tắc, thì $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, và $(A \leftrightarrow B)$ cũng thế
  - Ví dụ, với các mệnh đề nguyên tử p, q, $((p \vee q) \rightarrow (q \wedge \mathbf{F}))$ là công thức được tạo đúng quy tắc, còn $\wedge pq$, $pq\wedge$, và $p \wedge q$ thì không phải (Tại sao?)

Để chứng minh một tính chất P của các phần tử của một tập hợp định nghĩa theo đệ quy, ta sử dụng *quy nạp theo cấu trúc (structural induction)*

Nguyên lý quy nạp theo cấu trúc

- *Bước cơ sở:* Chứng minh rằng mọi phần tử định nghĩa trong bước cơ sở của định nghĩa đệ quy đều thỏa mãn P
- *Bước quy nạp:* Chứng minh rằng nếu các phần tử được sử dụng để xây dựng phần tử mới của tập hợp trong bước đệ quy đều thỏa mãn P, thì phần tử mới cũng thỏa mãn P

Ví dụ 14

Cho S là tập định nghĩa theo đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $3 \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $x \in S$ và $y \in S$ thì $x + y \in S$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấu trúc rằng *mọi phần tử của S đều chia hết cho 3*

- **Bước cơ sở:** 3 chia hết cho 3
- **Bước quy nạp:** Giả sử với $x \in S$ và $y \in S$, cả x và y đều chia hết cho 3. Ta chứng minh $n = x + y$ cũng chia hết cho 3. Thật vậy, do x chia hết cho 3, ta có $x = 3k$ với số nguyên k nào đó. Tương tự, $y = 3j$ với số nguyên j nào đó. Suy ra $n = x + y = 3(k + j)$, và do đó n cũng chia hết cho 3

Ví dụ 15

Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấu trúc rằng *mọi công thức được tạo đúng quy tắc trong lôgic mệnh đề có số dấu ngoặc đơn trái "(" bằng số dấu ngoặc đơn phải ")"*

- **Bước cơ sở:** Các mệnh đề $\mathbf{T}$, $\mathbf{F}$, và mọi mệnh đề nguyên tử s đều không có các dấu ngoặc đơn trái và phải
- **Bước quy nạp:** Với công thức A, gọi l_A và r_A lần lượt là số ngoặc đơn trái và ngoặc đơn phải của A. Giả sử với các công thức A, B, $l_A = r_A$ và $l_B = r_B$. Ta chứng minh rằng điều này cũng đúng với các công thức $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$, và $(A \leftrightarrow B)$. Thật vậy, công thức đầu tiên có $l_A + 1$ ngoặc trái và $r_A + 1$ ngoặc phải, và các công thức sau đó có $l_A + l_B + 1$ ngoặc trái và $r_A + r_B + 1$ ngoặc phải

Tài liệu tham khảo

Gunderson, David S. and Kenneth H. Rosen (2010). *Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications*. Chapman and Hall/CRC. DOI: 10.1201/b16005.

Part I

Phụ lục

Nội dung

Quy nạp toán học
- Tính đúng đắn của Quy nạp mạnh
- Quy nạp mạnh và quy nạp yếu là tương đương

Chứng minh (Quy nạp mạnh là đúng).

- Giả sử $P(1)$ đúng và với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$, $(P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)) \to P(k+1)$ đúng. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng phản chứng
- Giả sử tồn tại $n \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $P(n)$ sai. Do đó, tập $S = \{n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } P(n) \text{ sai}\} \subseteq \mathbb{Z}^+$ là tập khác rỗng.
- Theo Tiên đề 1, S có một phần tử nhỏ nhất m. Do $P(1)$ đúng và $m \in \mathbb{Z}^+$, ta có $m > 1$, suy ra $m - 1 \in \mathbb{Z}^+$
- Theo định nghĩa của m, với mọi số nguyên dương $j \leq m - 1$, ta có $P(j)$ đúng (nếu không thì $j < m$ và $P(j)$ sai; điều này mâu thuẫn với định nghĩa của m). Do đó $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(m-1)$ đúng
- Do $(P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)) \to P(k+1)$ đúng với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$, ta có $(P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(m-1)) \to P(m)$ đúng
- Kết hợp với $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(m-1)$ đúng, ta có $P(m)$ đúng. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của m. Do đó $P(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n

Quy nạp yếu $\Rightarrow$ Quy nạp mạnh.

(1) Giả sử với mọi $R(n)$, ta có $(R(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (R(k) \rightarrow R(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ R(n)$ đúng, nghĩa là, quy nạp yếu đúng

(2) Giả sử với vị từ $P(n)$ ta có $P(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ \bigwedge_{j=1}^{k} P(j) \rightarrow P(k+1)$ đúng, nghĩa là, bước cơ sở và bước quy nạp của quy nạp mạnh là đúng. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ đúng

(3) Ta định nghĩa $Q(n) = \bigwedge_{j=1}^{n} P(n)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$

(4) Từ (1), ta có $(Q(1) \wedge \forall k \in \mathbb{Z}^+ (Q(k) \rightarrow Q(k+1))) \rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}^+ Q(n)$ đúng

(5) Từ (3), ta có $Q(1) \equiv P(1)$ và $\forall n \in \mathbb{Z}^+ Q(n) \equiv \forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$

(6) Chú ý rằng với các mệnh đề p, q bất kỳ $p \rightarrow q \equiv p \rightarrow p \wedge q$ (Tại sao?).

(7) Do đó $Q(k) \rightarrow Q(k+1) \equiv \bigwedge_{j=1}^{k} P(k) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{k+1} P(k+1) \equiv \bigwedge_{j=1}^{k} P(k) \rightarrow \bigwedge_{j=1}^{k} P(k) \wedge P(k+1) \equiv \bigwedge_{j=1}^{k} P(k) \rightarrow P(k+1)$

(8) Thay (5) và (7) vào (4), ta có điều phải chứng minh

$\square$

Quy nạp mạnh $\Rightarrow$ Quy nạp yếu.

(1) Giả sử với mọi $R(n)$ ta có $(R(1) \land \forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (\bigwedge_{j=1}^{k} R(j) \to R(k+1))) \to \forall n \in \mathbb{Z}^+ \, R(n)$ đúng, nghĩa là, quy nạp mạnh đúng

(2) Giả sử với vị từ $P(n)$ ta có $P(1) \land \forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (P(k) \to P(k+1))$ đúng, nghĩa là, bước cơ sở và bước quy nạp của quy nạp yếu đúng. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ đúng

(3) Chú ý rằng với các mệnh đề p, q, r bất kỳ, nếu $p \to q$ đúng thì $p \land r \to q$ cũng đúng (Tại sao?)

(4) Áp dụng (1) với $P(n)$, ta có $(P(1) \land \forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (\bigwedge_{j=1}^{k} P(j) \to P(k+1))) \to \forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ đúng.

(5) Từ (2), ta có $P(1)$ đúng và $\forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (P(k) \to P(k+1))$ đúng. Kết hợp với (3), ta có $\forall k \in \mathbb{Z}^+ \, (\bigwedge_{j=1}^{k} P(j) \to P(k+1))$ đúng

(6) Từ (4) và (5) ta có điều phải chứng minh

$\square$