ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
————-

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II
NĂM HỌC 2023-2024
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **1**

Lớp học phần: **MAT3500 1, MAT3500 2** Ngành học: **KHDL**

Thời gian làm bài: **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

Chú ý: Đề gồm 5 câu/1 trang. Không sử dụng tài liệu. Điểm bài kiểm tra này chiếm 70% tổng số điểm của môn học. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1. (1 điểm) Cho tập $\Sigma = \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ và số nguyên $n \geq 1$. Gọi Σ^n là tích Đềcác của n tập Σ. Một *toán tử lôgic n-ngôi* là một hàm $f : \Sigma^n \to \Sigma$. Ví dụ, toán tử $\neg$ là một toán tử 1-ngôi. Cụ thể, hàm $\neg : \Sigma \to \Sigma$ định nghĩa bởi $\neg(\mathsf{T}) = \mathsf{F}$ và $\neg(\mathsf{F}) = \mathsf{T}$. (Chú ý là $\Sigma^1 = \Sigma$.) Tương tự, các toán tử $\wedge, \vee, \oplus, \to, \leftrightarrow$ là các toán tử 2-ngôi.

Có bao nhiêu toán tử lôgic n-ngôi khác nhau?

Câu 2. (1 điểm) Cho các tập hợp A, B, và C. Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho đẳng thức

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B \tag{1}$$

Câu 3. (2 điểm) Cho n là số nguyên không âm. Để chứng minh $n^9 - n$ chia hết cho 15, hãy chứng minh các phát biểu sau với mọi số nguyên không âm n.

(a) $n^9 - n$ chia hết cho 3.

(b) $n^9 - n$ chia hết cho 5.

Câu 4. (3 điểm) Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 \tag{2}$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm thỏa mãn điều kiện $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ và

(a) $x_1 \geq 8$, $x_2 \geq 5$, và $x_3 \geq 2$.

(b) $x_1 \geq 10$ và $x_3 \leq 7$.

(c) $x_1 \leq 6$ và $x_2 \leq 12$.

Câu 5. (3 điểm)

(a) Cho G là một đơn đồ thị phẳng có k thành phần liên thông. Giả sử G có n đỉnh, m cạnh, và một biểu diễn phẳng của G chia mặt phẳng ra thành r miền. Chứng minh rằng $n - m + r = k + 1$.

(b) Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng. Đặt $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg(v)$. Chứng minh rằng tồn tại một đường đi đơn trong G có độ dài $\delta(G)$ nếu $\delta(G) \geq 2$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2023-2024
Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **1**
Lớp học phần: **MAT3500 1, MAT3500 2** Ngành học: **KHDL**

Lời giải 1. **[1 điểm]**

Để định nghĩa một hàm $f : \Sigma^n \to \Sigma$, ta cần lần lượt định nghĩa giá trị cho mỗi bộ $(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma^n$, trong đó $x_i \in \Sigma$ với $1 \le i \le n$. Có tất cả 2^n bộ. Có 2 lựa chọn cho giá trị của mỗi bộ: T hoặc F.	**0.5**
Do đó, theo quy tắc nhân, có 2^{2^n} cách định nghĩa một toán tử lôgic n-ngôi f. Nói cách khác, có 2^{2^n} toán tử lôgic n-ngôi khác nhau.	**0.5**

Lời giải 2. **[1 điểm]**

$$\begin{aligned} (A \setminus B) \setminus C &= \{x \mid x \in (A \setminus B) \setminus C\} && \text{Định nghĩa tập hợp} \\ &= \{x \mid x \in (A \setminus B) \land x \notin C\} && \text{Định nghĩa hiệu hai tập hợp} \\ &= \{x \mid (x \in A \land x \notin B) \land x \notin C\} && \text{Định nghĩa hiệu hai tập hợp} \\ &= \{x \mid (x \notin B \land x \in A) \land x \notin C\} && \text{Giao hoán trong lôgic} \\ &= \{x \mid x \notin B \land (x \in A \land x \notin C)\} && \text{Kết hợp trong lôgic} \\ &= \{x \mid x \notin B \land x \in (A \setminus C)\} && \text{Định nghĩa hiệu hai tập hợp} \\ &= \{x \mid x \in (A \setminus C) \setminus B\} && \text{Định nghĩa hiệu hai tập hợp} \\ &= (A \setminus C) \setminus B && \text{Định nghĩa tập hợp} \end{aligned}$$	**1**

Lời giải 3. **[2 điểm]**

(a) Nếu n chia hết cho 3 thì hiển nhiên $n^9 - n$ cũng thế. Ta xét trường hợp n không chia hết cho 3. Theo Định lý Fermat nhỏ, $n^2 \equiv 1 \pmod 3$. Do đó, $n^9 = (n^2)^4 n \equiv n \pmod 3$. Suy ra $n^9 - n$ chia hết cho 3.	**1**
(b) Nếu n chia hết cho 5 thì hiển nhiên $n^9 - n$ cũng thế. Ta xét trường hợp n không chia hết cho 5. Theo Định lý Fermat nhỏ, $n^4 \equiv 1 \pmod 5$. Do đó, $n^9 = (n^4)^2 n \equiv n \pmod 5$. Suy ra $n^9 - n$ chia hết cho 5.	**1**

Lời giải 4. Chú ý rằng mỗi nghiệm của (2) là một bộ các số nguyên không âm (x_1, x_2, x_3, x_4). **[3 điểm]**

(a) Đặt $x'_1 = x_1 - 8 \geq 0$, $x'_2 = x_2 - 5 \geq 0$, và $x'_3 = x_3 - 2 \geq 0$. Phương trình (2) tương đương với $$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x_4 = 25 - 8 - 5 - 2 = 10 \quad (3)$$ trong đó x'_1, x'_2, x'_3, và x_4 là các số nguyên không âm. Do đó, số nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 8$, $x_2 \geq 5$, $x_3 \geq 2$, và $x_4 \geq 0$ bằng với số nghiệm của (3) thỏa mãn $x'_1 \geq 0$, $x'_2 \geq 0$, $x'_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$, và bằng $C^{4-1}_{10+4-1} = C^3_{13} = 286$.	**1**
(b) Gọi U là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$. Gọi A là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 0$, $0 \leq x_3 \leq 7$, và $x_4 \geq 0$. Ta cần tính $\|A\|$. Chú ý rằng $\overline{A} = U \setminus A$ là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 10$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 8$, và $x_4 \geq 0$. Thêm vào đó, $\|A\| = \|U\| - \|\overline{A}\|$. Đặt $x'_1 = x_1 - 10 \geq 0$. Tương tự như câu (a), $\|U\|$ chính là số nghiệm của phương trình $x'_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 - 10 = 15$ thỏa mãn $x'_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$. Do đó, $\|U\| = C^{4-1}_{15+4-1} = C^3_{18} = 816$. Đặt $x'_3 = x_3 - 8 \geq 0$. Tương tự như câu (a), $\|\overline{A}\|$ chính là số nghiệm của phương trình $x'_1 + x_2 + x'_3 + x_4 = 25 - 10 - 8 = 7$ thỏa mãn $x'_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x'_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$. Do đó, $\|\overline{A}\| = C^{4-1}_{7+4-1} = C^3_{10} = 120$. Do đó, $\|A\| = \|U\| - \|\overline{A}\| = 816 - 120 = 696$.	**1**

(c) **1**

Cách 1: Gọi U là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1,2,3,4\}$. Gọi A là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 6$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2,3,4\}$. Gọi B là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $0 \leq x_2 \leq 12$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1,3,4\}$. Ta cần tính $|A \cap B|$.

Ta có $\overline{A} = U \setminus A$, $\overline{B} = U \setminus B$, và $\overline{A \cap B} = U \setminus (A \cap B)$. Theo luật De Morgan, ta cũng có $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Theo quy tắc bù trừ, $|\overline{A} \cup \overline{B}| = |\overline{A}| + |\overline{B}| - |\overline{A} \cap \overline{B}|$. Do đó, ta cũng có $|A \cap B| = |U| - |\overline{A \cap B}| = |U| - |\overline{A} \cup \overline{B}| = |U| - |\overline{A}| - |\overline{B}| + |\overline{A} \cap \overline{B}|$.

Ta có $|U| = C^{4-1}_{25+4-1} = C^3_{28} = 3276$.

Chú ý rằng $\overline{A}$ là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 7$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2,3,4\}$. Đặt $x_1' = x_1 - 7 \geq 0$. Tương tự câu (a), $|\overline{A}|$ bằng số nghiệm của phương trình $x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 25 - 7 = 18$ thỏa mãn $x_1' \geq 0$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2,3,4\}$. Do đó, $|\overline{A}| = C^{4-1}_{18+4-1} = C^3_{21} = 1330$.

Chú ý rằng $\overline{B}$ là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_2 \geq 13$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1,3,4\}$. Đặt $x_2' = x_2 - 13 \geq 0$. Tương tự câu (a), $|\overline{B}|$ bằng số nghiệm của phương trình $x_1 + x_2' + x_3 + x_4 = 25 - 13 = 12$ thỏa mãn $x_2' \geq 0$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1,3,4\}$. Do đó, $|\overline{B}| = C^{4-1}_{12+4-1} = C^3_{15} = 455$.

Chú ý rằng $\overline{A} \cap \overline{B}$ là tập hợp các nghiệm của (2) thỏa mãn $x_1 \geq 7$, $x_2 \geq 13$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{3,4\}$. Đặt $x_1' = x_1 - 7 \geq 0$ và $x_2' = x_2 - 13 \geq 0$. Tương tự câu (a), $|\overline{A} \cap \overline{B}|$ bằng số nghiệm của phương trình $x_1' + x_2' + x_3 + x_4 = 25 - 13 - 7 = 5$ thỏa mãn $x_1' \geq 0$, $x_2' \geq 0$, và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{3,4\}$. Do đó, $|\overline{A} \cap \overline{B}| = C^{4-1}_{5+4-1} = 56$.

Do đó, $|A \cap B| = |U| - |\overline{A}| - |\overline{B}| + |\overline{A} \cap \overline{B}| = 3276 - 1330 - 455 + 56 = 1547$.

Cách 2: Số nghiệm của (2) thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 6$, $0 \leq x_2 \leq 12$, $x_3 \geq 0$, và $x_4 \geq 0$ là hệ số của x^{25} trong hàm sinh

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^0 + x^1 + \cdots + x^6)(x^0 + x^1 + \cdots + x^{12})(x^0 + x^1 + \cdots + x^{25})^2 \\ &= (1 - x^7 - x^{13} + x^{20})(1 - 2x^{26} + x^{52})(1 - x)^{-4} \end{aligned}$$

Chú ý rằng hệ số của x^r trong khai triển của $(1-x)^{-4}$ là $(-1)^r C^r_{-4} = (-1)^r((-1)^r C^r_{4+r-1}) = C^r_{r+3}$. Để có x^{25} trong khai triển của $G(x)$ ta có thể

(i) Nhân x^0 trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^{25} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$. Hệ số $c_{(i)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^{25} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$.

(ii) Nhân x^7 trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^{18} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$. Hệ số $c_{(ii)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^{18} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$.

(iii) Nhân x^{13} trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^{12} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$. Hệ số $c_{(iii)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^{12} trong khai triển của $(1-x)^{-4}$.

(iv) Nhân x^{20} trong $1 - x^7 - x^{13} + x^{20}$ với x^0 trong $1 - 2x^{26} + x^{52}$ và với x^5 trong khai triển của $(1-x)^{-4}$. Hệ số $c_{(iv)}$ của x^{25} ở đây là hệ số của x^5 trong khai triển của $(1-x)^{-4}$.

Hệ số của x^{25} trong khai triển của $G(x)$ là $c_{(i)} - c_{(ii)} - c_{(iii)} + c_{(iv)} = C^{25}_{28} - C^{18}_{21} - C^{12}_{15} + C^5_8 = 1547$.

Lời giải 5. [3 điểm]

(a) Gọi G_i, $1 \leq i \leq k$, là các thành phần liên thông của G. Giả sử G_i có n_i đỉnh, m_i cạnh, và một biểu diễn phẳng của G_i chia mặt phẳng thành r_i miền, với $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Theo công thức Euler, với $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $n_i - m_i + r_i = 2$. Thêm vào đó, ta cũng có $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $m = \sum_{i=1}^{k} m_i$, và $r = \sum_{i=1}^{k} r_i - k + 1$ (do các biểu diễn phẳng của G_i ($1 \leq i \leq k$) có chung miền vô hạn). Do đó, $$\begin{aligned} n - m + r &= \sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} m_i + (\sum_{i=1}^{k} r_i - k + 1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (n_i - m_i + r_i) - k + 1 \\ &= 2k - k + 1 \\ &= k + 1. \end{aligned}$$	**1.5**
(b) Gọi $P = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ là đường đi đơn dài nhất trong G. Do $\delta(G) \geq 2$, ta cũng có $\deg_G(v_0) \geq \delta(G) \geq 2$. Xét đỉnh $w \in N_G(v_0)$ bất kỳ. Ta chứng minh $w \in V(P)$. Thật vậy, giả sử $w \notin V(P)$. Đường đi $P' = w, v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ là đường đi đơn trong G có độ dài lớn hơn P, mâu thuẫn với định nghĩa của P. Do đó, $w \in V(P)$. Ta đã chứng minh với mọi $w \in N_G(v_0)$, $w \in V(P)$. Do đó, $N_G(v_0) \cup \{v_0\} \subseteq V(P)$, suy ra $\delta(G) + 1 \leq \lvert N_G(v_0) \cup \{v_0\} \rvert \leq \lvert V(P) \rvert$. Do đó, P là một đường đi đơn có độ dài tối thiểu là $\delta(G)$, và ta luôn chọn được một đường đi con của P có độ dài chính xác $\delta(G)$ thỏa mãn yêu cầu đề ra.	**1.5**

Hà Nội, ngày 20 tháng 05 năm 2024
NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
(ký và ghi rõ họ tên)

Hoàng Anh Đức