VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Các cấu trúc cơ bản

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

1 Tập hợp

Bài tập 1. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{0, 3, 6\}$. Tìm

(a) $A \cup B$

(b) $A \cap B$

(c) $A - B$

(d) $A \Delta B$

Bài tập 2. Tìm các tập A và B, biết rằng $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$, và $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

Bài tập 3. Cho các tập hợp A, B. Chứng minh

(a) $(A \cap B) \subseteq A$

(b) $A \subseteq (A \cup B)$

(c) $A - B \subseteq A$

(d) $A \cap (B - A) = \emptyset$

(e) $A \cup (B - A) = A \cup B$

Bài tập 4. Hãy chứng minh rằng với các tập A, B, C, $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ bằng cách

(a) Chứng minh theo định nghĩa. (Nhắc lại: $A = B$ khi và chỉ khi $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.)

(b) Dùng bảng tính thuộc.

Bài tập 5. Với các tập A, B, C, có thể kết luận rằng $A = B$ nếu

(a) $A \cup C = B \cup C$?

(b) $A \cap C = B \cap C$?

(c) $A \cup C = B \cup C$ và $A \cap C = B \cap C$?

Bài tập 6. Với A là tập con của một tập vũ trụ U, chứng minh rằng

(a) $A \Delta U = \overline{A}$

(b) $A \Delta \overline{A} = U$

Bài tập 7. Với hai tập A, B bất kỳ, chứng minh

(a) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(b) $A \Delta B = B \Delta A$

(c) $(A \Delta B) \Delta B = A$

Bài tập 8. Có thể nói gì về các tập A, B nếu $A \Delta B = A$?

Bài tập 9. Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times C) \cup (B \times C)$

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times C) \cap (B \times C)$

trong đó A, B, C là các tập bất kỳ.

2 Hàm

Bài tập 10. Hãy tìm ví dụ một hàm f từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{N}$ thỏa mãn

(a) f là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

(b) f là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

(c) f là song ánh và f khác hàm đồng nhất trên $\mathbb{N}$

(d) f vừa không là đơn ánh vừa không là toàn ánh

Bài tập 11. Hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là đơn ánh không?

(a) $f(n) = n - 1$

(b) $f(n) = n^2 + 1$

(c) $f(n) = n^3$

(d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

Bài tập 12. Hàm $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là toàn ánh không?

(a) $f(m, n) = 2m - n$

(b) $f(m, n) = m^2 - n^2$

(c) $f(m, n) = m + n + 1$

(d) $f(m, n) = m^2 - 4$

Bài tập 13. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là song ánh không?

(a) $f(x) = -3x + 4$

(b) $f(x) = -3x^2 + 7$

(c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

(d) $f(x) = x^5 + 1$

(e) $f(x) = 2x + 1$

(f) $f(x) = x^2 + 1$

(g) $f(x) = x^3$

(h) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2) + 2$

Bài tập 14. Gọi $f : A \to B$ là một hàm với A, B là các tập hữu hạn thỏa mãn $|A| = |B|$. Chứng minh rằng f là đơn ánh khi và chỉ khi nó là toàn ánh.

Bài tập 15. Cho các hàm $g : A \to B$ và $f : B \to C$. Chứng minh rằng

(a) Nếu cả g và f đều là đơn ánh thì $f \circ g$ cũng là đơn ánh.

(b) Nếu cả g và f đều là toàn ánh thì $f \circ g$ cũng là toàn ánh.

(c) Nếu $f \circ g$ là toàn ánh thì f cũng là toàn ánh

(d) Nếu $f \circ g$ là đơn ánh thì g cũng là đơn ánh

(e) Nếu $f \circ g$ là song ánh thì g là toàn ánh khi và chỉ khi f là đơn ánh

Bài tập 16. Tìm ví dụ các hàm f và g thỏa mãn $f \circ g$ là song ánh, nhưng g không phải toàn ánh và f không phải đơn ánh.

Bài tập 17. Chứng minh các tính chất sau của hàm trần và hàm sàn, trong đó $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}$

(1a) $\lfloor x \rfloor = n$ khi và chỉ khi $n \leq x < n + 1$

(1b) $\lceil x \rceil = n$ khi và chỉ khi $n - 1 < x \leq n$

(1c) $\lfloor x \rfloor = n$ khi và chỉ khi $x - 1 < n \leq x$

(1d) $\lceil x \rceil = n$ khi và chỉ khi $x \leq n < x + 1$

(2) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

(3a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

(3b) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

(4a) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

(4b) $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$

Bài tập 18. Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{N}$ thì $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$ nếu n chẵn và $\lfloor n/2 \rfloor = (n - 1)/2$ nếu n lẻ.

Bài tập 19. Chứng minh rằng nếu $x \in \mathbb{R}$ thì $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$.
(**Gợi ý:** Khi xét các bài toán liên quan đến hàm sàn, một cách tiếp cận hữu ích là đặt $x = n + \epsilon$ trong đó $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ và ϵ là một số thực thỏa mãn $0 \leq \epsilon < 1$. Tương tự, với hàm trần, có thể đặt $x = n - \epsilon$.)

3 Dãy và Tổng

Bài tập 20. Trong mỗi trường hợp sau, tìm các số hạng $a_0, a_1, \ldots, a_5$ của dãy $\{a_n\}$ nếu

(a) $a_n = 2^{n-1}$

(b) $a_n = 1 + (-1)^n$

(c) $a_n = (n+1)^{n+1}$

(d) $a_n = 7$

(e) $a_n = -(-2)^n$

(f) $a_n = \lfloor n/2 \rfloor$

Bài tập 21. Dãy $\{a_n\}$ có phải là lời giải của hệ thức truy hồi $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$ nếu

(a) $a_n = 0$?

(b) $a_n = 1$?

(c) $a_n = 2^n$?

(d) $a_n = 4^n$?

(e) $a_n = n4^n$?

(f) $a_n = 2 \cdot 4^n + 3n4^n$?

(g) $a_n = (-4)^n$?

(h) $a_n = n^2 4^n$?

Bài tập 22. Tìm lời giải cho mỗi hệ thức truy hồi sau với các điều kiện ban đầu tương ứng cho trước bằng phương pháp đã trình bày trong bài giảng.

(a) $a_n = -a_{n-1}$, $a_0 = 5$

(b) $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_0 = 1$

(c) $a_n = a_{n-1} - n$, $a_0 = 4$

(d) $a_n = 2a_{n-1} - 3$, $a_0 = -1$

(e) $a_n = (n+1)a_{n-1}$, $a_0 = 2$

(f) $a_n = 2na_{n-1}$, $a_0 = 3$

(g) $a_n = -a_{n-1} + n - 1$, $a_0 = 7$

Bài tập 23. Cho $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Tìm a_0, a_1, a_2, a_3, và a_4.

(b) Hãy chứng minh $a_2 = 5a_1 - 6a_0$, $a_3 = 5a_2 - 6a_1$, và $a_4 = 5a_3 - 6a_2$.

(c) Hãy chỉ ra rằng $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$.

Bài tập 24. Giả thiết dân số thế giới năm 2017 là 7.6 tỷ người và tăng theo tỷ lệ 1.12%/năm.

(a) Xây dựng hệ thức truy hồi cho dân số thế giới n năm sau 2017.

(b) Tìm công thức tường minh để tính dân số thế giới n năm sau 2017.

(c) Dân số thế giới năm 2050 sẽ là bao nhiêu?

Bài tập 25. Một người nộp 1000 USD vào một tài khoản tiết kiệm với lãi suất 9%/năm và mỗi năm tiền lãi được chuyển vào tài khoản vào ngày cuối cùng của năm. Giả thiết rằng chỉ có thể rút tiền khi đóng tài khoản.

(a) Xây dựng hệ thức truy hồi để tính số tiền trong tài khoản sau n năm.

(b) Tìm công thức tường minh để tính số tiền trong tài khoản sau n năm.

(c) Sau 100 năm, trong tài khoản có bao nhiêu tiền?

Bài tập 26. Với mỗi dãy số nguyên sau, hãy tìm một công thức đơn giản hoặc một cách để tìm các số hạng tiếp theo của dãy. Giả sử công thức bạn tìm ra là đúng, hãy tìm ba số hạng tiếp theo của dãy

(a) $1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$

(b) $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, \ldots$

(c) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \ldots$

(d) $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots$

(e) $15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, \ldots$

(f) $3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, \ldots$

(g) $2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, \ldots$

(h) $2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321, \ldots$

Bài tập 27. Tính các tổng sau

(a) $\sum_{k=100}^{200} k$

(b) $\sum_{k=99}^{200} k^3$

(c) $\sum_{10}^{20} k^2(k-3)$

Bài tập 28. (a) Chứng minh rằng $\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$, trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là một dãy gồm các số thực.

(b) Sử dụng đẳng thức $1/(k(k+1)) = 1/k - 1/(k+1)$ và phần (a) để tính $\sum_{k=1}^{n} 1/(k(k+1))$.

Bài tập 29. Lấy tổng cả hai vế của đẳng thức $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$ từ $k = 1$ đến $k = n$ và sử dụng Bài tập 28(a) để tìm một công thức tường minh cho $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ (tổng n số tự nhiên lẻ đầu tiên).