VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

1 Lôgic mệnh đề

Bài tập 1. Câu nào sau đây là mệnh đề? Nếu là mệnh đề thì giá trị chân lý của nó là gì?

(a) Trả lời câu hỏi này.

(b) $x + 2 = 11$.

(c) $5 + 7 = 10$.

(d) Mấy giờ rồi?

(e) $2^n \geq 100$.

Bài tập 2. Khẳng định "Phát biểu này là sai" có phải là một mệnh đề lôgic hay không? Vì sao?

Trong các bài tập sau, p, q, r ký hiệu các mệnh đề.

Bài tập 3. Gọi $p :=$ "Tôi mua một vé xổ số tuần này" và $q :=$ "Tôi trúng giải đặc biệt 1 triệu đôla". Hãy mô tả bằng câu thông thường các mệnh đề sau:

(a) $\neg p$

(b) $p \vee q$

(c) $p \to q$

(d) $p \wedge q$

(e) $p \leftrightarrow q$

(f) $\neg p \to \neg q$

(g) $\neg p \wedge \neg q$

(h) $\neg p \vee (p \wedge q)$

Bài tập 4. Xây dựng bảng chân trị cho các mệnh đề phức hợp sau

(a) $p \to \neg q$

(b) $\neg p \leftrightarrow q$

(c) $(p \to q) \vee (\neg p \to q)$

(d) $(p \to q) \wedge (\neg p \to q)$

(e) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$

(f) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

Bài tập 5. Xây dựng bảng chân trị cho các mệnh đề phức hợp sau

(a) $p \oplus p$

(b) $p \oplus \neg p$

(c) $p \oplus \neg q$

(d) $\neg p \oplus \neg q$

(e) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$

(f) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$

Bài tập 6. Giả sử bảng chân trị với n biến mệnh đề đã được cho trước đầy đủ các giá trị chân lý. Một mệnh đề phức hợp tương ứng với bảng chân trị đó có thể tạo thành bằng cách lấy tuyển các hội của các biến hoặc phủ định của chúng. Đối với mỗi tổ hợp các giá trị sao cho mệnh đề phức hợp là đúng ta đưa vào một hội. Mệnh đề tạo thành được gọi là có *dạng tuyển chuẩn tắc (DNF - Disjunctive Normal Form)*.

Với mỗi mệnh đề ở các Bài tập 4 và 5, hãy tìm một mệnh đề tương đương lôgic dạng tuyển chuẩn tắc.

Bài tập 7. Tính các biểu thức sau

1. $11000 \wedge (01011 \vee 11011)$
2. $(01111 \wedge 10101) \vee 01000$
3. $(01010 \oplus 11011) \oplus 01000$
4. $(11011 \vee 01010) \wedge (10001 \vee 11011)$

Bài tập 8. Chứng minh các tương đương lôgic sau

(a) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

(b) $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

(c) $\neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$

(d) $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$

(e) $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$

(f) $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$

(g) $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

(h) $\neg p \to (q \to r) \equiv q \to (p \vee r)$

Bài tập 9. *Đối ngẫu* của một mệnh đề phức hợp chỉ chứa các toán tử logic $\wedge$, $\vee$, và $\neg$ là một mệnh đề nhận được bằng cách thay mỗi $\vee$ bằng $\wedge$, mỗi $\wedge$ bằng $\vee$, mỗi $\mathbf{T}$ bằng $\mathbf{F}$, và mỗi $\mathbf{F}$ bằng $\mathbf{T}$. Đối ngẫu của một mệnh đề phức hợp s được ký hiệu là $s^\star$.

(a) Tìm đối ngẫu của các mệnh đề sau

(a-1) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

(a-2) $p \wedge (q \vee (r \wedge \mathbf{T}))$

(b) Khi nào thì $s = s^\star$, với s là một mệnh đề phức hợp nào đó?

(c) Chứng minh rằng $(s^\star)^\star = s$.

(**Chú ý:** Với hai mệnh đề p, q, chú ý rằng $p = q$ khác với $p \equiv q$. Ví dụ $p \neq p \wedge \mathbf{T}$ nhưng $p \equiv p \wedge \mathbf{T}$.)

2 Lôgic vị từ

Bài tập 10. Tìm phản ví dụ, nếu có, của các mệnh đề sau, trong đó các biến xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

(a) $\forall x\, (x^2 \neq x)$

(b) $\forall x\, (x^2 \geq x)$

(c) $\forall x\, (x^2 \neq 2)$

Bài tập 11. Giả sử A là một mệnh đề và x không phải là một biến tự do trong A. Giả sử miền xác định không rỗng. Hãy chứng minh các tương đương lôgic sau

(a) $(\forall x\, P(x)) \vee A \equiv \forall x\, (P(x) \vee A)$

(b) $(\exists x\, P(x)) \vee A \equiv \exists x\, (P(x) \vee A)$

(c) $(\forall x\, P(x)) \wedge A \equiv \forall x\, (P(x) \wedge A)$

(d) $(\exists x\, P(x)) \wedge A \equiv \exists x\, (P(x) \wedge A)$

Bài tập 12. Chứng minh các mệnh đề sau không tương đương lôgic

(a) $\forall x\, (P(x) \to Q(x))$ và $\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)$

(b) $\forall x\, (P(x) \leftrightarrow Q(x))$ và $\forall x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, Q(x)$

(**Gợi ý:** Chọn $P(x)$ và $Q(x)$ sao cho mệnh đề đầu tiên sai và mệnh đề thứ hai đúng.)

Bài tập 13. Chứng minh rằng các mệnh đề $\neg\exists x \forall y\, P(x, y)$ và $\forall x \exists y\, \neg P(x, y)$ là tương đương lôgic, giả thiết rằng các biến trong hai mệnh đề có cùng miền xác định.

Bài tập 14. Hãy biểu diễn phủ định của các mệnh đề sau sao cho tất cả các ký tự $\neg$ đứng ngay trước các vị từ.

(a) $\forall x \exists y \forall z\, T(x, y, z)$

(b) $\forall x \exists y\, P(x, y) \vee \forall x \exists y\, Q(x, y)$

(c) $\forall x \exists y\, (P(x, y) \wedge \exists z\, R(x, y, z))$

(d) $\forall x \exists y\, (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$

Bài tập 15. Giả thuyết Goldbach "Mọi số chẵn lớn hơn hoặc bằng 4 là tổng của hai số nguyên tố" có thể được biểu diễn thông qua các vị từ, lượng từ, và mệnh đề lôgic theo một trong hai cách sau:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \left[n > 2 \wedge 2 \mid n \rightarrow \big(\exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z}\ \big[\mathit{isPrime}(p) \wedge \mathit{isPrime}(q) \wedge n = p + q \big] \big) \right] \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z} \left[n \leq 2 \vee 2 \nmid n \vee \big[\mathit{isPrime}(p) \wedge \mathit{isPrime}(q) \wedge n = p + q \big] \right] \tag{2}$$

trong đó $2 \mid n$ nghĩa là "n chia hết cho 2"; $2 \nmid n$ nghĩa là "n không chia hết cho 2"; và $\mathit{isPrime}(p)$ nghĩa là "p là một số nguyên tố". Hãy chứng minh các mệnh đề (1) và (2) là tương đương lôgic.

3 Chứng minh

Bài tập 16. Chứng minh trực tiếp các mệnh đề sau.

(a) Tổng của hai số lẻ là một số chẵn

(b) Tổng của hai số chẵn là một số chẵn

(c) Bình phương của một số chẵn là một số chẵn

(d) Tích của hai số lẻ là một số lẻ

Bài tập 17. Chứng minh các mệnh đề sau bằng phương pháp phản chứng.

(a) Tổng của một số vô tỷ và một số hữu tỷ là một số vô tỷ

(b) Nếu n là một số nguyên và $n^3 + 5$ lẻ, thì n chẵn.

(c) Nếu n là một số nguyên và $3n + 2$ chẵn, thì n chẵn.

Bài tập 18. Chứng minh các mệnh đề sau. Nêu rõ phương pháp bạn sử dụng.

(a) Nếu n là số nguyên chẵn thì $(-1)^n = 1$.

(b) Nếu x, y, z là các số nguyên và $x + y + z$ lẻ, thì ít nhất một trong ba số x, y, z là lẻ.

(c) Nếu m và n là các số nguyên và mn chẵn, thì m chẵn hoặc n chẵn.

(d) Nếu n là một số nguyên dương, thì n chẵn khi và chỉ khi $7n + 4$ chẵn.

(e) Nếu n là một số nguyên dương, thì n lẻ khi và chỉ khi $5n + 6$ lẻ.

(f) $m^2 = n^2$ khi và chỉ khi $m = n$ hoặc $m = -n$

Bài tập 19. Chứng minh rằng

1. Có ít nhất mười ngày trong 64 ngày bất kỳ rơi vào cùng một ngày của một tuần (nghĩa là, có ít nhất mười ngày cùng là Thứ Hai, hoặc cùng là Thứ Ba, v.v...).
2. Có ít nhất ba ngày trong 25 ngày bất kỳ rơi vào cùng một tháng của năm.

Bài tập 20. Những lý luận sau để tìm nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2 - 1} = x$ là đúng hay sai.

(1) Cho $\sqrt{2x^2 - 1} = x$

(2) Bình phương cả hai vế của (1), ta có $2x^2 - 1 = x^2$

(3) Trừ x^2 từ cả hai vế của (2), ta có $x^2 - 1 = 0$

(4) Phân tích vế trái của (3) thành nhân tử, ta có $(x - 1)(x + 1) = 0$

(5) Bởi vì nếu $ab = 0$ thì $a = 0$ hoặc $b = 0$, ta có $x = -1$ hoặc $x = 1$

Bài tập 21. Sử dụng phương pháp phản chứng, hãy chứng minh rằng $\sqrt{2}$ không phải là một số hữu tỷ.

Bài tập 22. Sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh rằng không có số hữu tỷ r nào thỏa mãn $r^3 + r + 1 = 0$
(**Gợi ý:** Giả sử rằng $r = a/b$ là một nghiệm, trong đó a, b là các số nguyên và a/b là tối giản. Bằng cách nhân cả hai vế với b^3, ta thu được một phương trình với các số nguyên. Hãy xét tính chẵn lẻ của a và b.)