VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Lý thuyết đồ thị II

Đường đi ngắn nhất, Đồ thị phẳng, Tô màu đồ thị

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
- Đường đi Euler
- Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất
- Đồ thị có trọng số
- Thuật toán Dijkstra

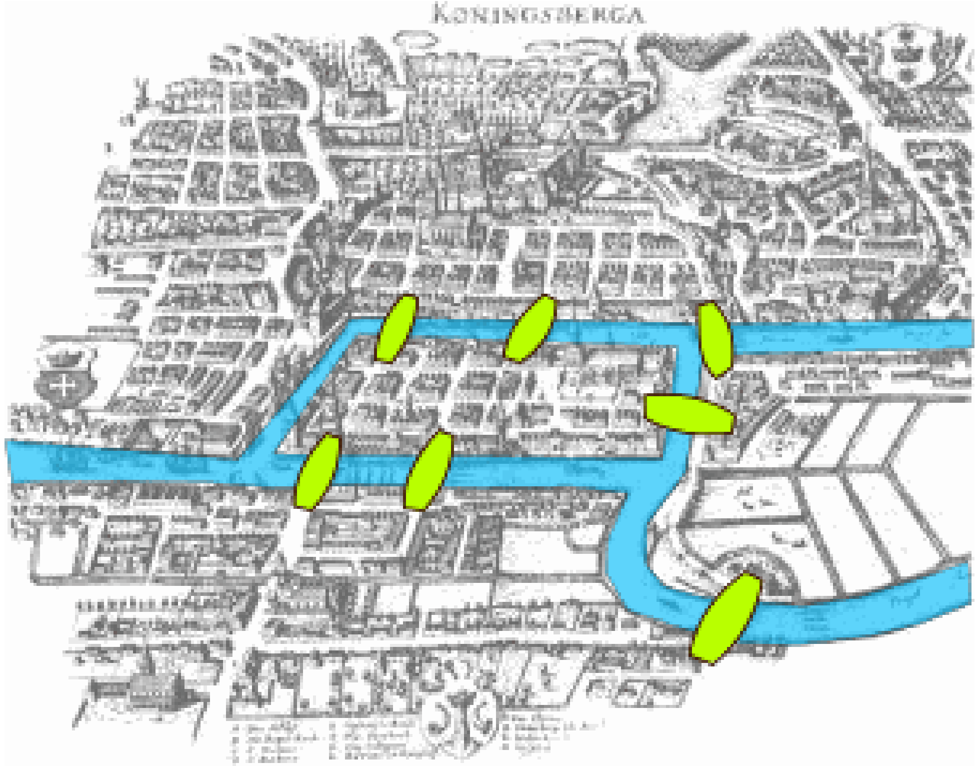
Đồ thị phẳng
- Định nghĩa và khái niệm
- Công thức Euler
- Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị
- Giới thiệu
- Một số tính chất cơ bản
- Tô màu đồ thị phẳng

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Bảy cây cầu ở Königsberg

Hình: Leonhard Euler 1707–1783 (Wikipedia)



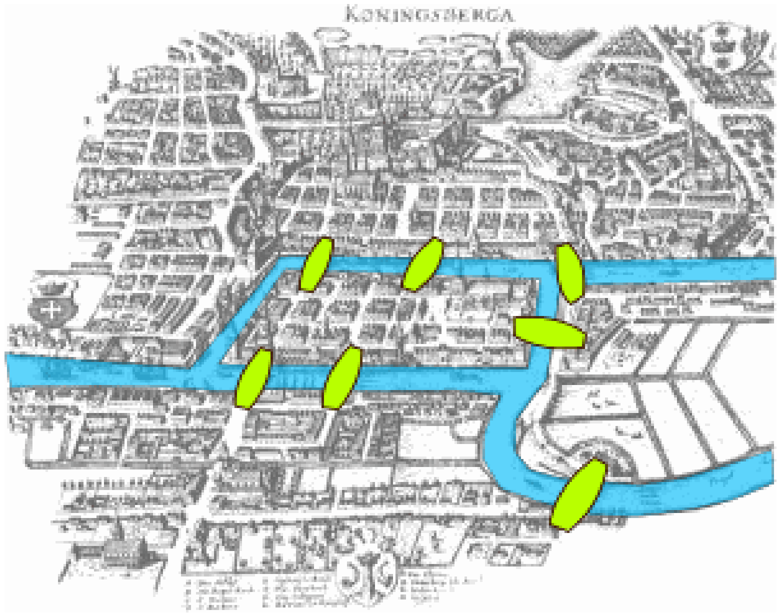
Hình: Bản đồ Königsberg cũ (Wikipedia)

Bảy cây cầu ở Königsberg

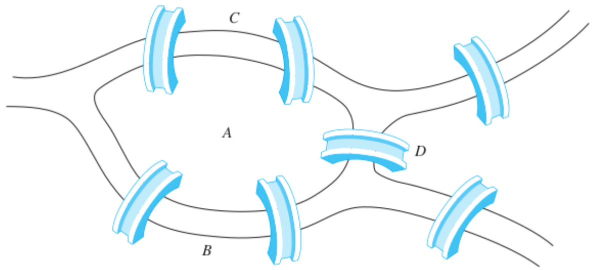
Tìm một tuyến đường đi qua mỗi cây cầu chính xác một lần và quay lại vị trí xuất phát

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
2 Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

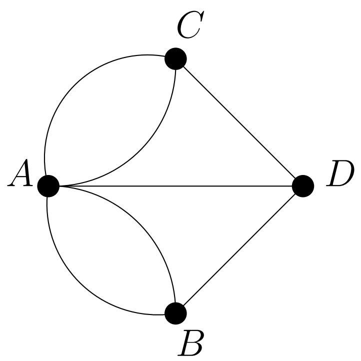
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Bảy cây cầu ở Königsberg



(a) Bản đồ Königsberg cũ (Wikipedia)



(b) Bản đồ Königsberg cũ đơn giản hóa



(c) Đồ thị tương ứng

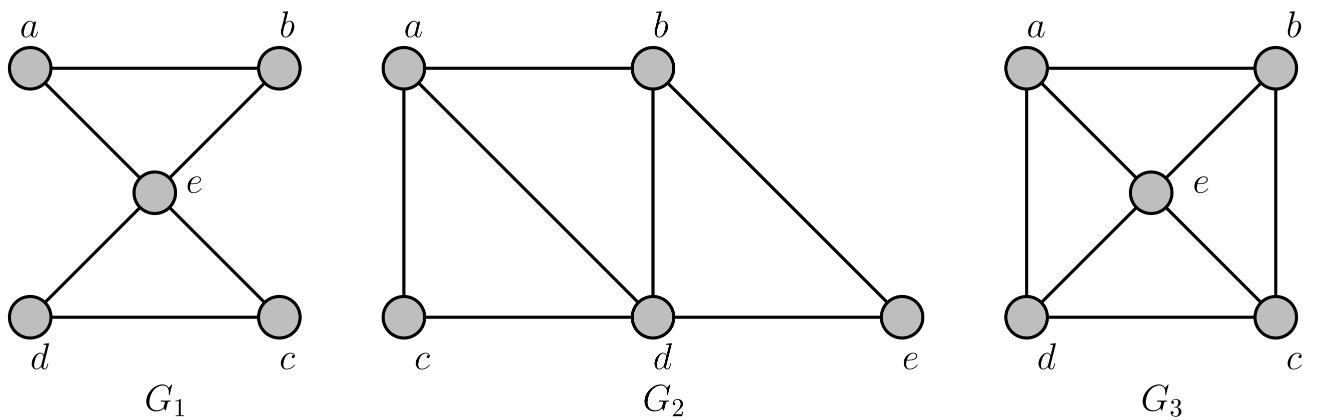
- Đồ thị tương ứng:
  - Mỗi vùng đất ứng với một đỉnh
  - Mỗi cây cầu nối hai vùng đất ứng với một cạnh
- Tìm chu trình đơn trong đồ thị chứa tất cả các cạnh

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
3 Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler

Cho đồ thị $G = (V, E)$. Một *đường đi/chu trình Euler (Eulerian path/circuit)* trong G là một đường đi/chu trình đơn có chứa mọi cạnh của G

Ví dụ 1



- G_1 có chu trình Euler, G_2 và G_3 không có
- G_2 có đường đi Euler, G_3 không có

Bài tập 1

Chứng minh rằng nếu $G = (V, E)$ là một đa đồ thị vô hướng thỏa mãn $\deg_G(u) \geq 2$ với mọi $u \in V$ thì G có một chu trình đơn

Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
4 Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Định lý 1

Một đa đồ thị vô hướng liên thông có một chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của đồ thị có bậc chẵn

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử một đa đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$ có một chu trình Euler $e_1, e_2, \dots, e_m$ trong đó $e_i = x_{i-1}x_i \in E$ với $1 \leq i \leq m$ và $x_0 = x_m = u$.

- Với $v = x_i$ $(2 \leq i \leq m-1)$: chu trình đi vào v qua e_i và đi ra qua e_{i+1}
- Với $u = x_0 = x_m$: chu trình đi ra u qua e_1 và trở lại u qua e_m

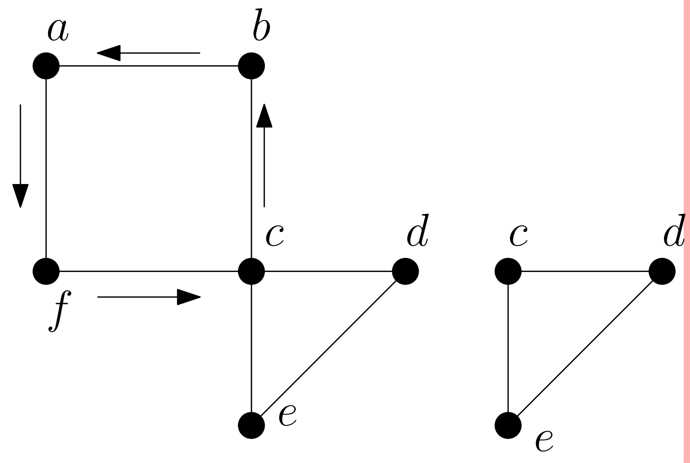
□

Chứng minh (tiếp).

(⇐) Giả sử mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn. Lặp lại quá trình chọn chu trình sau cho đến khi đã chọn hết các cạnh (**Thuật toán Hierholzer (1873)**)

- Xuất phát từ đỉnh $x_0 = a$ bất kỳ
- Xây dựng một đường đi đơn bằng cách chọn tùy ý các cạnh $x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{k-1}x_k$ để thêm vào đường đi cho đến khi không chọn được nữa
- Do bậc của mỗi đỉnh là chẵn, với mỗi đỉnh x_i, ta luôn có thể đi vào từ cạnh $x_{i-1}x_i$ và đi ra từ cạnh x_ix_{i+1}. Do bậc của a cũng phải là chẵn, cạnh cuối cùng được chọn sẽ có dạng ya
- Bỏ đi các cạnh đã chọn và các đỉnh không kề với các cạnh còn lại

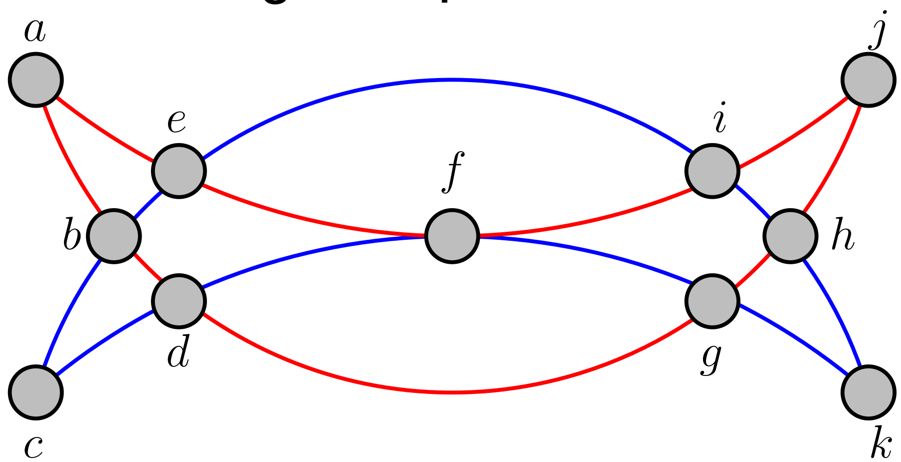
Cuối cùng, ghép các chu trình trên thành một chu trình Euler. (Thuật toán chạy trong thời gian $O(|E|)$)



Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Ví dụ 2

Tìm chu trình Euler trong đồ thị sau

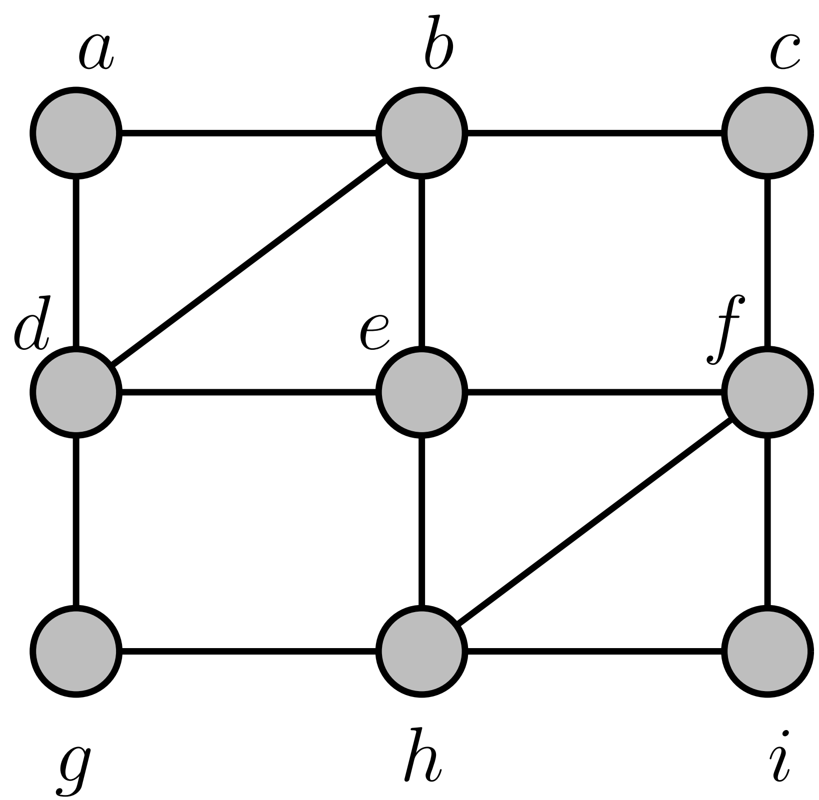


- Bắt đầu từ $x_0 = a$, chọn tùy ý các cạnh $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k, x_ka$. Ví dụ: $ae, ef, fi, ij, jh, hg, gd, db, ba$
- Bỏ đi các cạnh đã chọn và các đỉnh a, j
- Bắt đầu từ $x_0 = c$, chọn tùy ý các cạnh $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{l-1}x_l, x_lc$. Ví dụ: $cb, be, ei, ih, hk, kg, gf, fd, dc$
- Bỏ đi các cạnh đã chọn và các đỉnh cô lập còn lại
- Ghép hai chu trình đã chọn thành một chu trình Euler:
  - $ae, ei, ih, hk, kg, gf, fd, dc, cb, be, ef, fi, ij, jh, hg, gd, db, ba$
  - $ae, ef, fd, dc, cb, be, ei, ih, hk, kg, gf, fi, ij, jh, hg, gd, db, ba$
  - $\dots$

Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
7 Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Bài tập 2

Tìm chu trình Euler trong đồ thị sau.



Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
8 Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Định lý 2

Một đa đồ thị vô hướng liên thông G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi có đúng hai đỉnh của G có bậc lẻ.

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler
- Hai đỉnh ở hai đầu mút của đường đi có bậc lẻ
- Các đỉnh còn lại có bậc chẵn

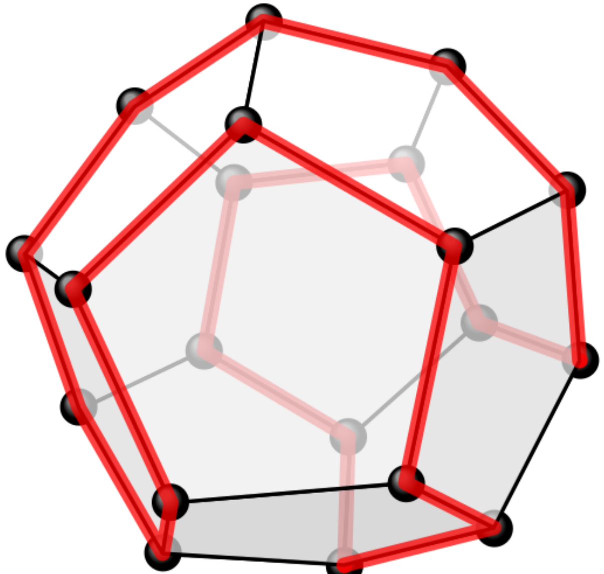
($\Leftarrow$) Giả sử G có chính xác hai đỉnh bậc lẻ u, v
- Tìm chu trình Euler của đồ thị $G + uv$
- Xóa cạnh uv trong chu trình để thu được đường đi Euler trong G

$\square$

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Trò chơi “Vòng quanh thế giới” (1857)

Hình: Sir William Rowan Hamilton 1805–1865 (Wikipedia)



Hình: Trò chơi “Vòng quanh thế giới” (Wikipedia)

Trò chơi “Vòng quanh thế giới”

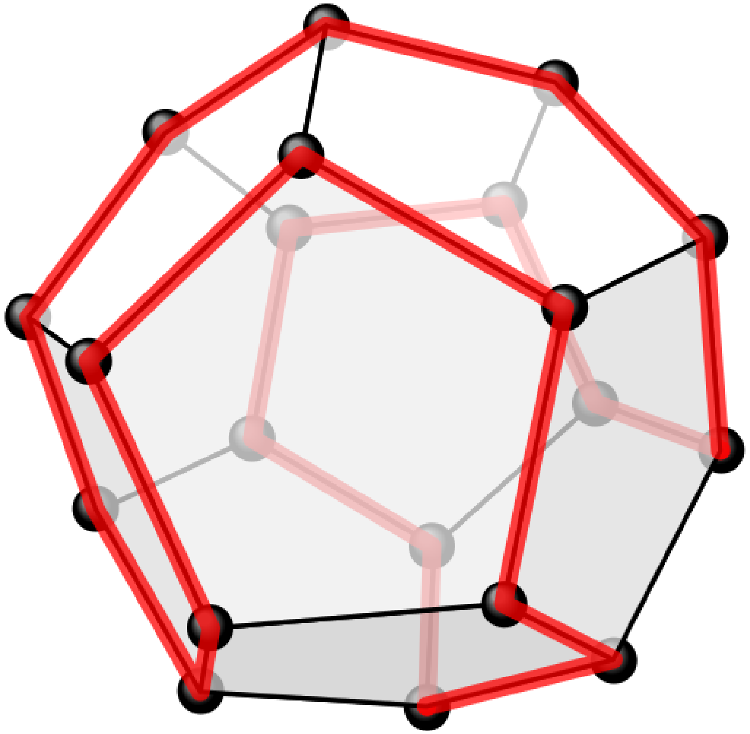
Mỗi đỉnh trong 20 đỉnh của khối 12 mặt đại diện cho một thành phố. Tìm đường đi xuất phát từ một đỉnh dọc theo các cạnh của khối, ghé thăm mỗi đỉnh còn lại một lần, và quay lại vị trí ban đầu

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
10 Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

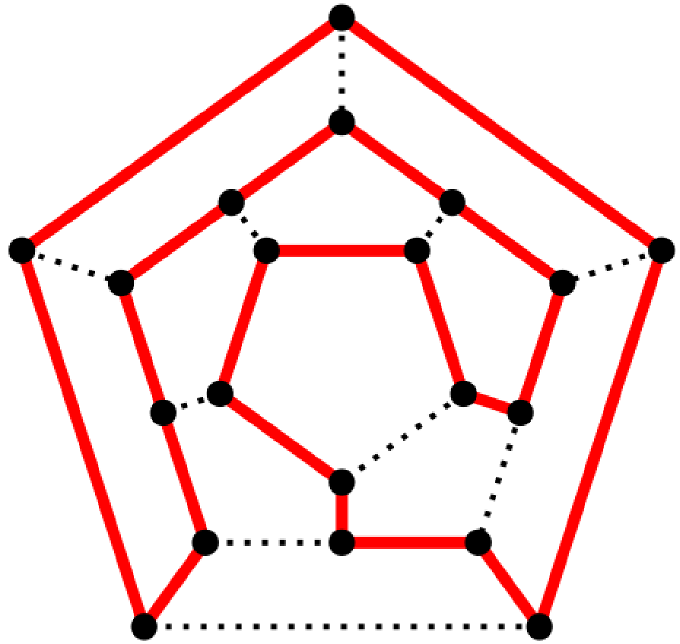
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Trò chơi “Vòng quanh thế giới” (1857)

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References



(a) Trò chơi “Vòng quanh thế giới” (Wikipedia)



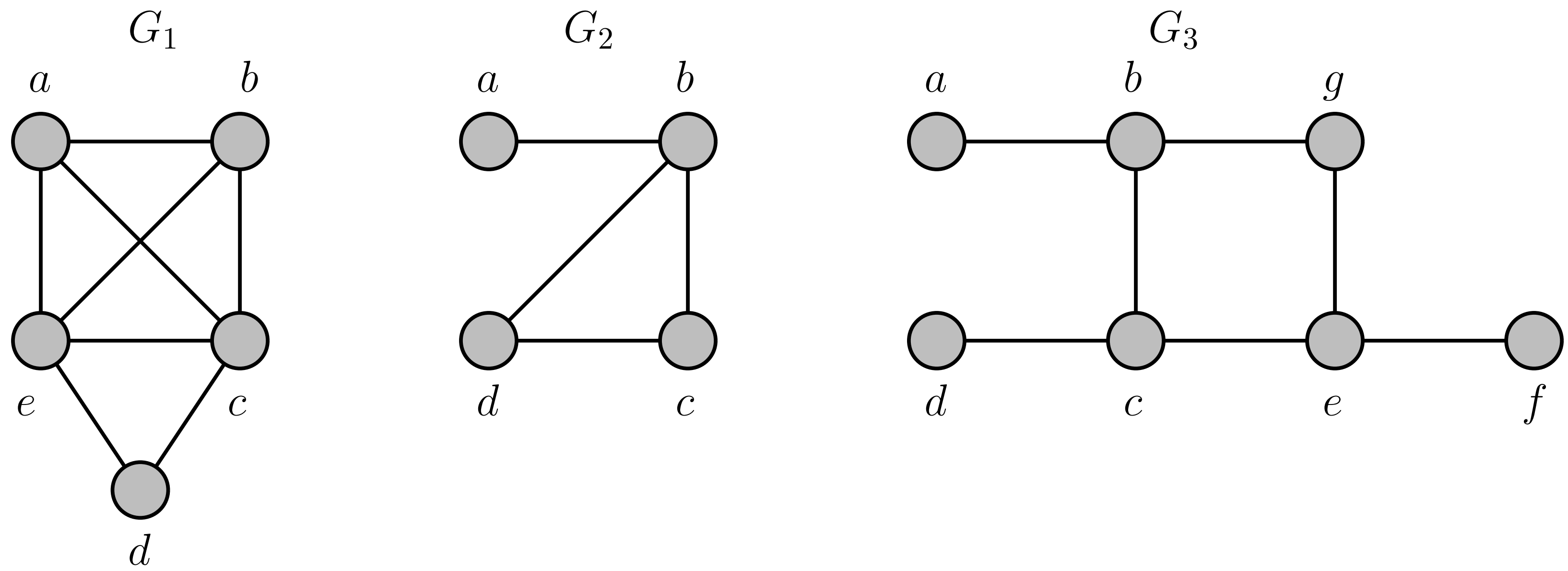
(b) Đồ thị đẳng cấu với khối 12 mặt (Wikipedia)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng

- Một *đường đi Hamilton* trong G là một đường đi đơn $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ thỏa mãn điều kiện $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ và $x_i \neq x_j$ với $0 \leq i < j \leq n$
- Một *chu trình Hamilton* trong G là một chu trình đơn $x_0, x_1, x_{n-1}, x_n, x_0$ thỏa mãn điều kiện x_0, x_1, x_{n-1}, x_n là một đường đi Hamilton

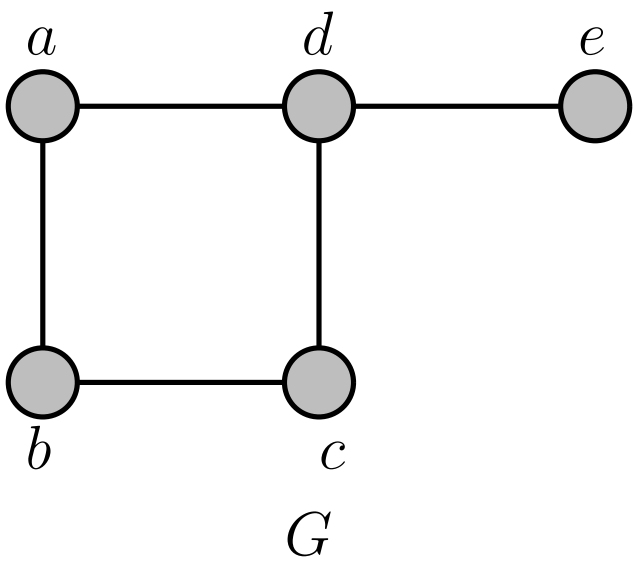
Bài tập 3

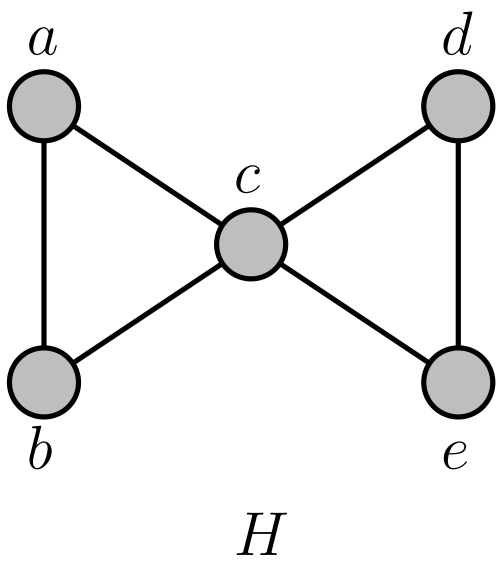
Các đồ thị sau có chu trình/đường đi Hamilton không?



Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

- *Chưa có* điều kiện cần và đủ để kiểm tra xem một đồ thị có chu trình Hamilton hay không
- Một số tính chất có thể được sử dụng để chỉ ra một đồ thị *không có chu trình Hamilton*
  - Đồ thị *có chứa đỉnh bậc* 1 không có chu trình Hamilton
  - Nếu *đỉnh* v của đồ thị G có *bậc* 2 thì *hai cạnh kề với* v *thuộc mọi chu trình Hamilton của* G *(nếu có)*
  - Một chu trình Hamilton *không chứa một chu trình con nào có số đỉnh nhỏ hơn nó*





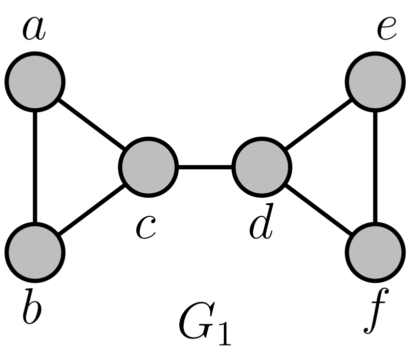
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

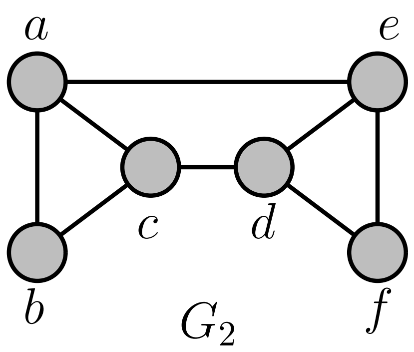
Bài tập 4

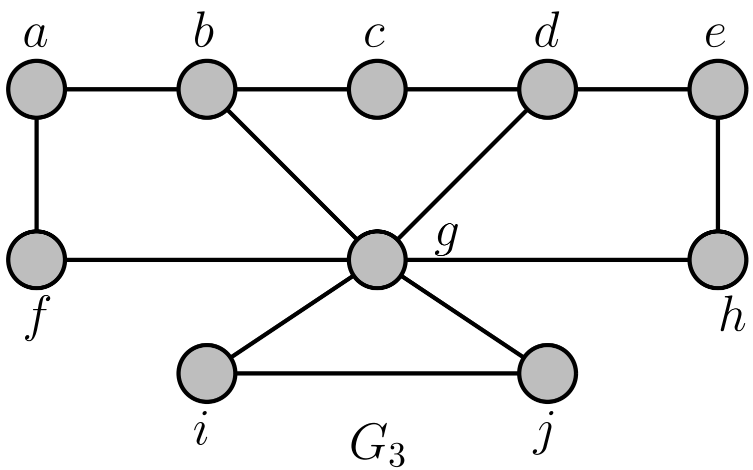
Hãy cho ví dụ về một đồ thị mà chu trình Euler của nó cũng là chu trình Hamilton

Bài tập 5

Trong các đồ thị sau, đồ thị nào có chu trình Hamilton? Tại sao?







Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Định lý 3: Định lý Dirac

Nếu $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng gồm n đỉnh ($n \geq 3$) thỏa mãn điều kiện bậc của mỗi đỉnh trong G lớn hơn hoặc bằng $n/2$ thì G có một chu trình Hamilton

Bài tập 6 (($\star$) Chứng minh Định lý Dirac)

(a) *Dễ thấy Định lý đúng với $n = 3$. Giả sử $n \geq 4$*

(b) *G phải liên thông (Tại sao?)*

(c) *Gọi $P = v_0, v_1, \dots, v_k$ là đường đi đơn có độ dài lớn nhất trong G ($0 \leq k \leq n-1$).*
- *Mọi đỉnh kề với v_0 hoặc v_k đều phải thuộc P (Tại sao?)*
- *Do $\deg(v_k) \geq n/2$, có ít nhất $n/2$ cạnh phân biệt v_iv_{i+1} của P thỏa mãn $v_iv_k \in E$. Tương tự, do $\deg(v_0) \geq n/2$, có ít nhất $n/2$ cạnh phân biệt v_jv_{j+1} của P thỏa mãn $v_0v_{j+1} \in E$*
- *Do P có ít hơn n cạnh, tồn tại một cạnh v_qv_{q+1} thỏa mãn đồng thời hai điều kiện trên: $v_qv_k \in E$ và $v_0v_{q+1} \in E$*

(d) *P chứa tất cả các đỉnh của G (Tại sao?)*

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
- Đường đi Euler
- 15 Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất
- Đồ thị có trọng số
- Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng
- Định nghĩa và khái niệm
- Công thức Euler
- Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị
- Giới thiệu
- Một số tính chất cơ bản
- Tô màu đồ thị phẳng

References

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
- Đường đi Euler
- Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất
- Đồ thị có trọng số
- Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng
- Định nghĩa và khái niệm
- Công thức Euler
- Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị
- Giới thiệu
- Một số tính chất cơ bản
- Tô màu đồ thị phẳng

References

Định lý 4: Định lý Ore

Nếu $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng gồm n đỉnh ($n \geq 3$) thỏa mãn điều kiện $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ với mọi cặp đỉnh u, v không kề nhau trong G thì G có một chu trình Hamilton

Bài tập 7

Chứng minh Định lý Dirac (Định lý 3) bằng cách sử dụng Định lý Ore

Bài tập 8

Cho $G = (V_1 \cup V_2, E)$ là một đồ thị hai phần với $|V_1| = |V_2| = n$ ($n \geq 2$). Chứng minh rằng nếu $\deg(v) > n/2$ với mọi đỉnh $v \in V = V_1 \cup V_2$ thì G có một chu trình Hamilton

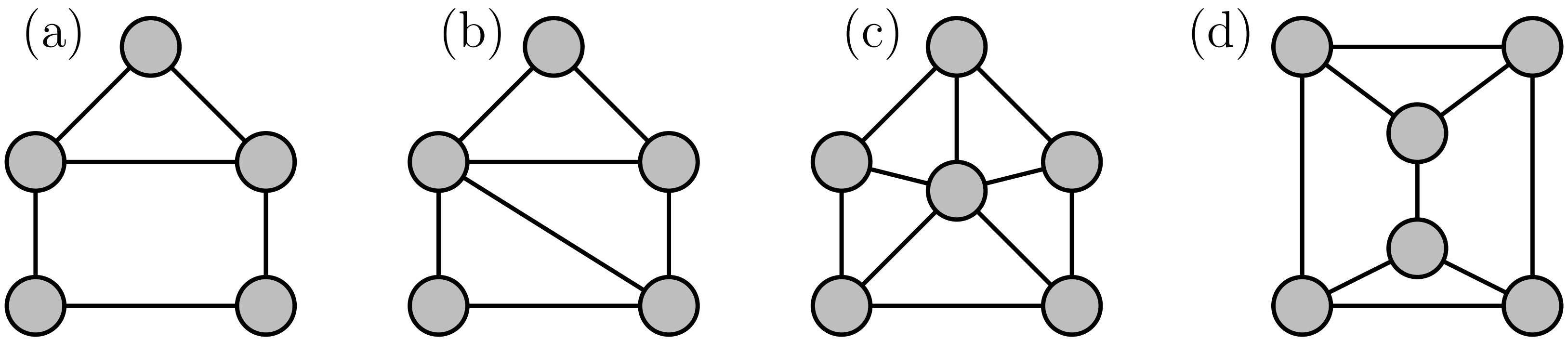
Bài tập 9

Với mỗi đồ thị sau, hãy xác định

(i) *có thể sử dụng Định lý Dirac để chứng minh đồ thị có chu trình Hamilton không?*

(ii) *có thể sử dụng Định lý Ore để chứng minh đồ thị có chu trình Hamilton không?*

(iii) *đồ thị có chu trình Hamilton không?*

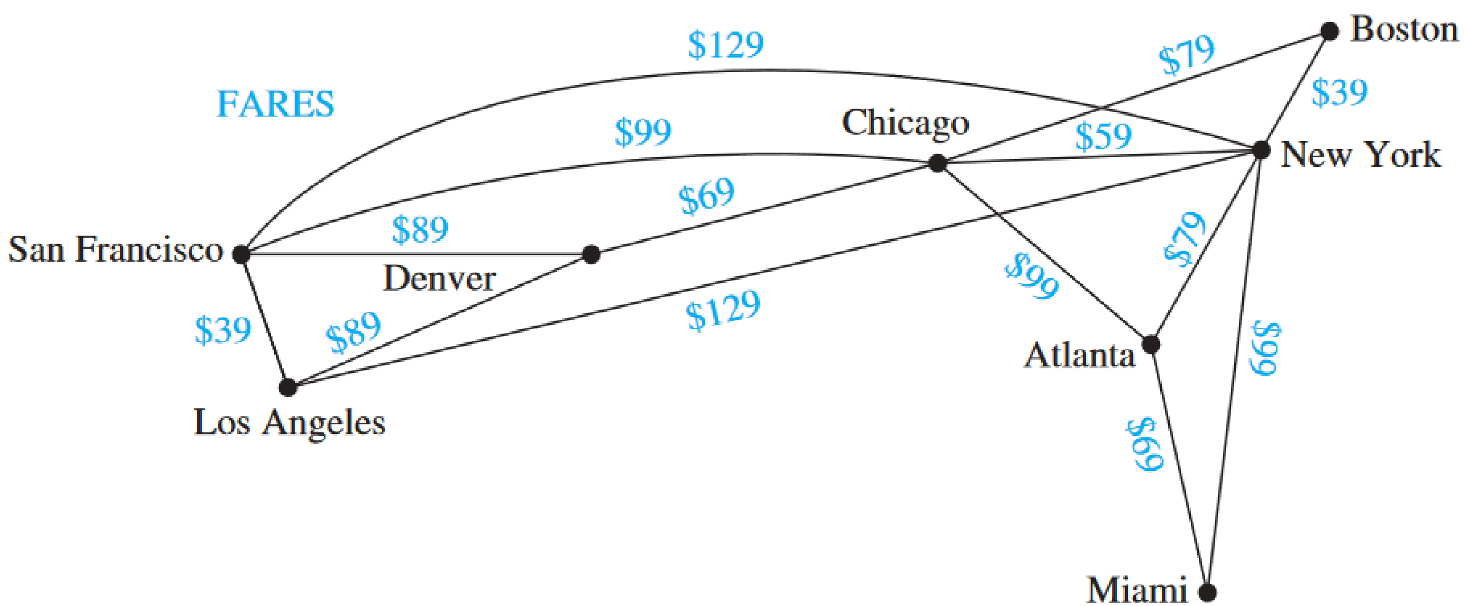


Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
17 Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

- Một *đồ thị có trọng số (weighted graph)* $G = (V, E, w)$ gồm tập đỉnh V, tập cạnh E, và một hàm $w : E \to \mathbb{R}$ gán mỗi cạnh (cung) $e \in E$ bởi một số thực $w(e)$ gọi là *trọng số (weight)* của cạnh (cung) e
- Trong bài giảng, chúng ta chỉ xét các đồ thị có *trọng số dương*, nghĩa là, $w : E \to \mathbb{R}^+$



Hình: Đồ thị có trọng số mô tả giá vé của các chuyến bay giữa một số thành phố ở Mỹ (từ [Rosen 2012], Chương 10)

Bài toán đường đi ngắn nhất

Đồ thị có trọng số

Cho $G = (V, E, w)$ là đơn đồ thị có trọng số

- Một đường đi từ u đến v qua các cạnh (cung) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ có *chiều dài (length)* $c(u, v) = \sum_{i=1}^{n} w(e_i)$
- *Khoảng cách (distance)* giữa hai đỉnh u, v, ký hiệu $d_G(u, v)$, là chiều dài nhỏ nhất của một đường đi từ u đến v

Bài toán đường đi ngắn nhất

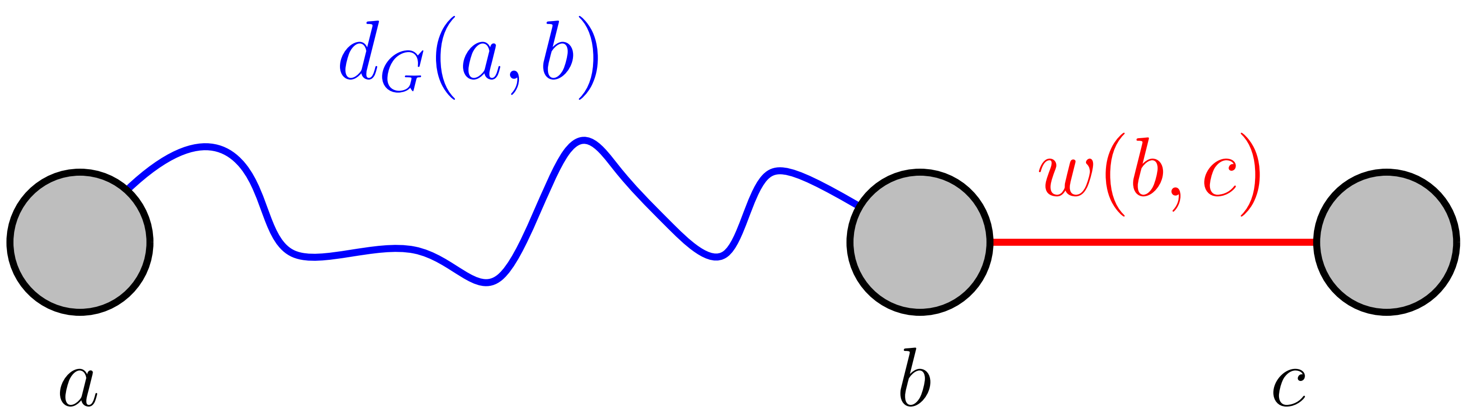
- **Input:** Đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E, w)$ trong đó $V = \{v_0 = a, v_1, \ldots, v_n = z\}$, $w : [V]^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ với $w(v_i, v_j) = \infty$ nếu $v_i v_j \notin E$
- **Output:** Khoảng cách $d_G(a, z)$

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
19 Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Bài toán đường đi ngắn nhất

- **Input:** Đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E, w)$ trong đó $V = \{v_0 = a, v_1, \dots, v_n = z\}$, $w : [V]^2 \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ với $w(v_i, v_j) = \infty$ nếu $v_iv_j \notin E$
- **Output:** Khoảng cách $d_G(a, z)$

Ý tưởng: Tìm đường đi ngắn nhất từ a tới các đỉnh kế tiếp cho đến khi đạt đến z. Chú ý rằng với các đỉnh a, b, c, *độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến c **đi qua đỉnh** b kề với c* bằng *khoảng cách giữa a và b* cộng với *trọng số cạnh nối b và c*



Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

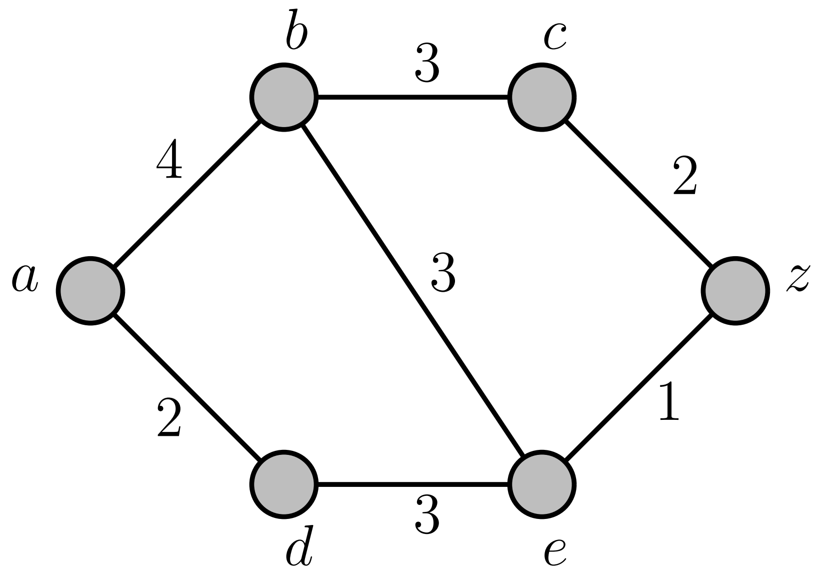
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Thuật toán Dijkstra

- Khởi tạo: Gán nhãn $L(a) := 0$, $L(v_i) := \infty$ với mọi $v_i \neq a$, và lấy một tập $S := \emptyset$.
- Trong khi $z \notin S$, lặp lại các bước sau:
  - Gọi u là đỉnh không thuộc S với $L(u)$ nhỏ nhất. Thêm u vào S.
  - Với mọi đỉnh v không thuộc S
    - Nếu $L(u) + w(u, v) < L(v)$ thì gán $L(v) := L(u) + w(u, v)$ (Sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc S)
- Cuối cùng, $L(z)$ là độ dài đường đi ngắn nhất (khoảng cách) từ a đến z.

Ví dụ 3

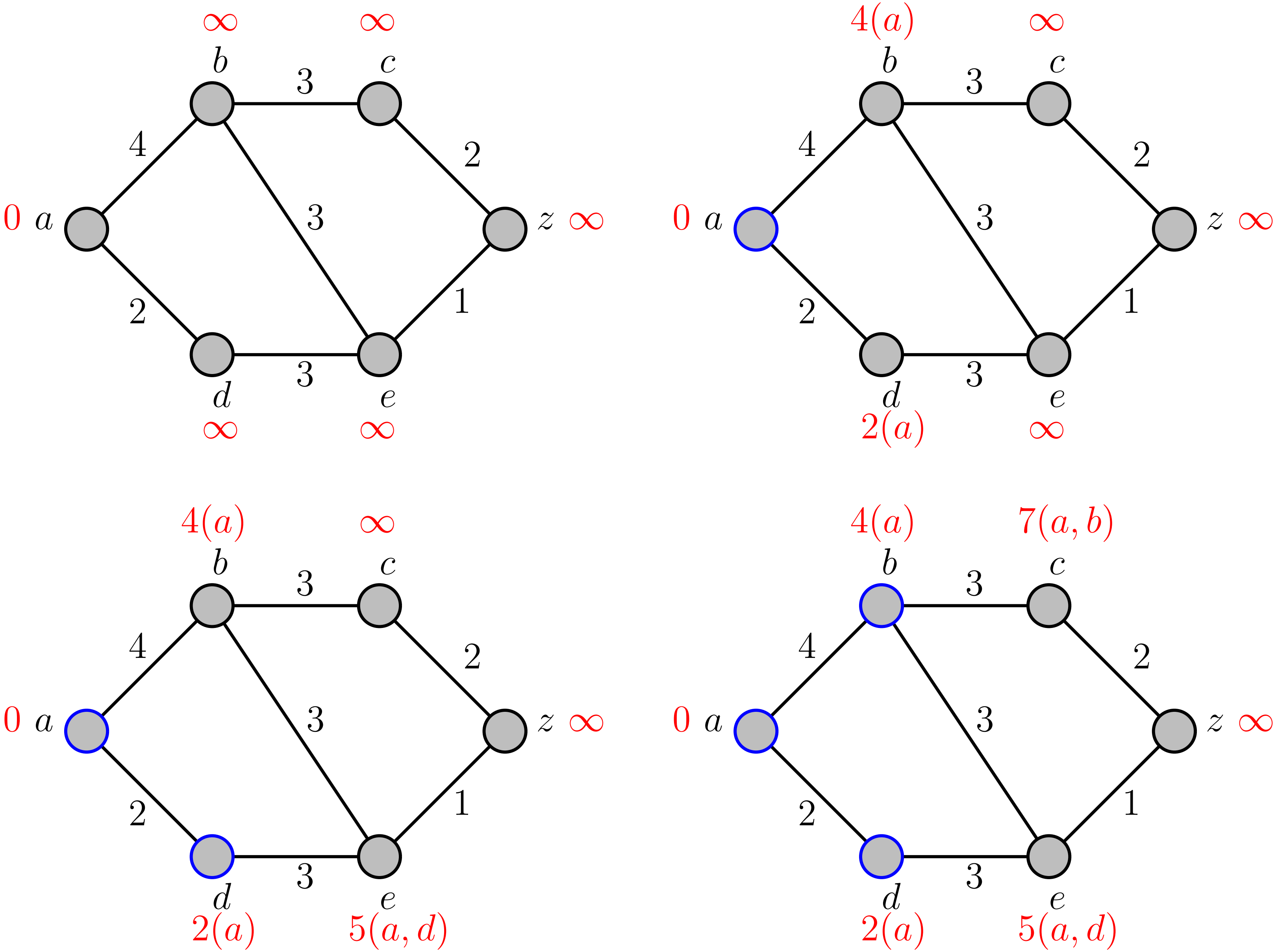
Sử dụng thuật toán Dijkstra để tìm khoảng cách giữa hai đỉnh a và z trong đồ thị sau



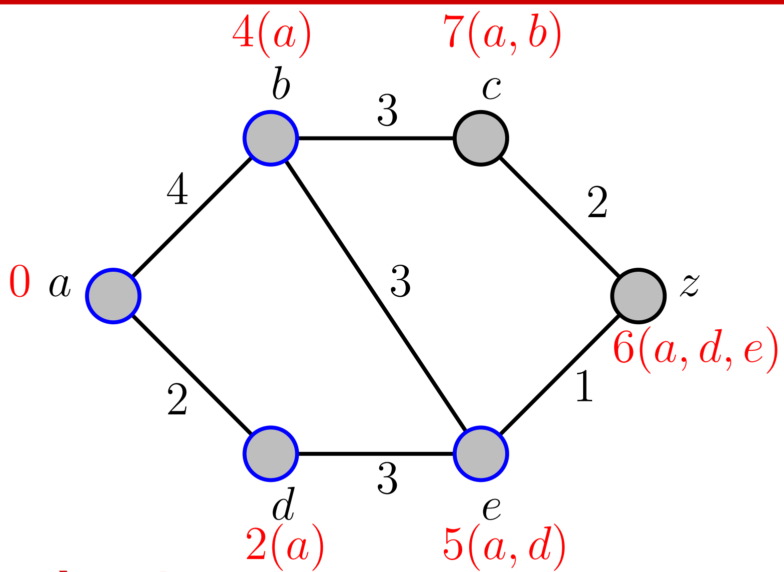
Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

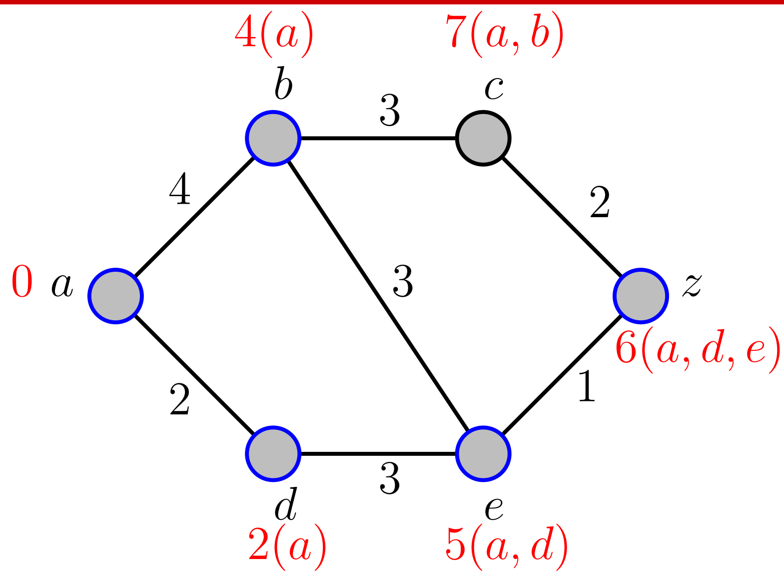
Bài toán đường đi ngắn nhất

Thuật toán Dijkstra



Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

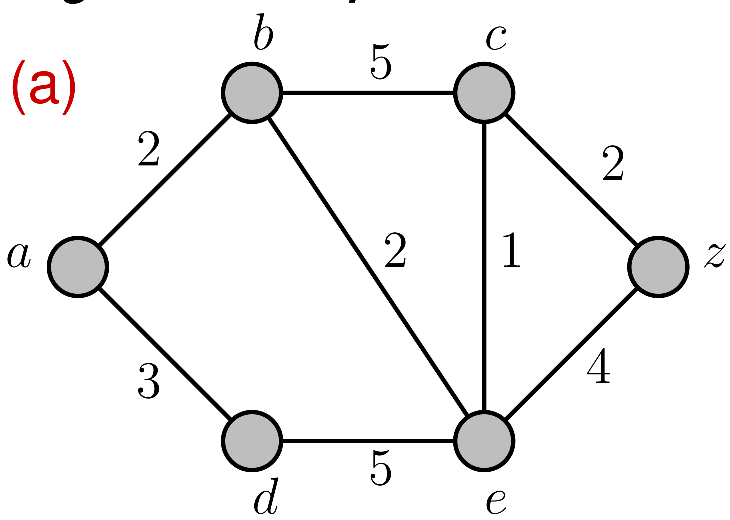




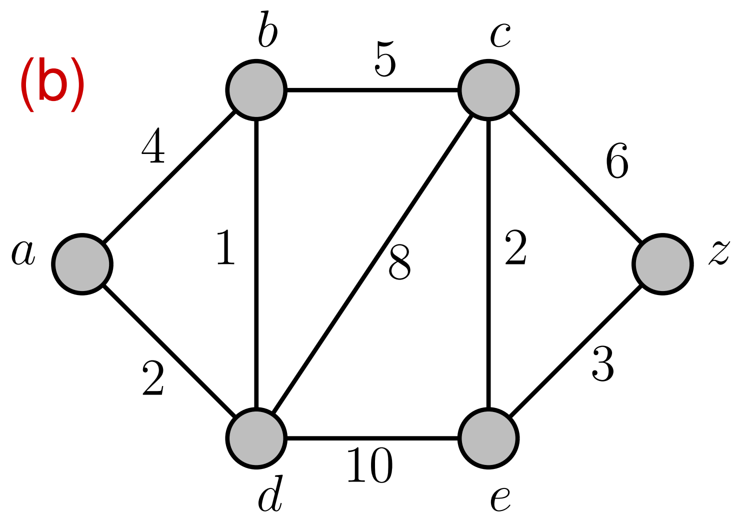
Bài tập 10

Áp dụng thuật toán Dijkstra để tìm khoảng cách từ a đến z trong mỗi đồ thị sau

(a)



(b)



Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
- Đường đi Euler
- Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất
- Đồ thị có trọng số
- Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng
- Định nghĩa và khái niệm
- Công thức Euler
- Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị
- Giới thiệu
- Một số tính chất cơ bản
- Tô màu đồ thị phẳng

References

- Tính đúng đắn của thuật toán Dijkstra có thể được chứng minh bằng cách *sử dụng bất biến vòng lặp*. Cụ thể, trước mỗi lần lặp, hàm L và tập S thỏa mãn các tính chất sau:
  (1) Với mọi $v \in S$, $L(v)$ là khoảng cách từ a đến v
  (2) Với mọi $v \in V - S$, $L(v)$ là độ dài đường đi ngắn nhất từ a đến v **chỉ qua các đỉnh thuộc** $S \cup \{v\}$
  (3) Với mọi $u \in S$ và $v \in V - S$, $L(u) \leq L(v)$
- Thông thường, thuật toán Dijkstra chạy trong thời gian $O(n^2)$, với $n = |V|$
- Với cấu trúc dữ liệu "đống Fibonacci" (Fibonacci Heap), thuật toán Dijkstra có thể được lập trình để chạy trong thời gian $O(m + n \log n)$, với $n = |V|$ và $m = |E|$. Hiệu quả của cách lập trình này được thể hiện khi chạy với các "đồ thị thưa" (sparse graph) cực lớn (các đồ thị có m rất nhỏ so với n^2)
- Thuật toán Dijkstra cũng có thể được lập trình để xuất ra một đường đi ngắn nhất từ a đến mỗi đỉnh khác trong đồ thị

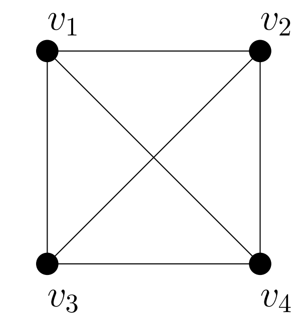
Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

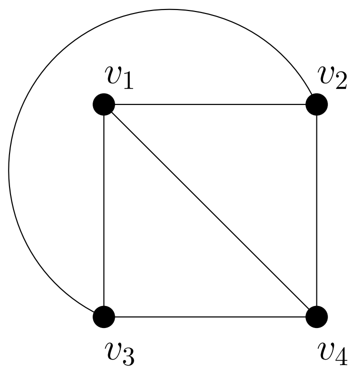
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm

- Một đồ thị vô hướng được gọi là *đồ thị phẳng (planar graph)* nếu nó có thể được vẽ trên mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau (ở một điểm không phải là đầu mút của cạnh).
- Hình vẽ như thế được gọi là một *biểu diễn phẳng (planar representation)* của đồ thị.

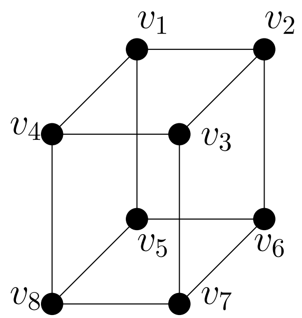
Ví dụ 4

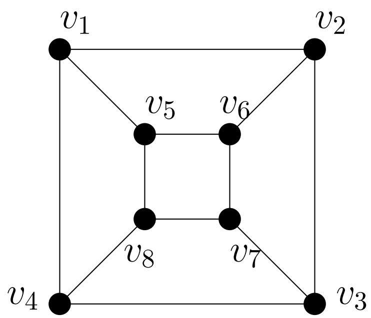
K_4





Q_3





Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski

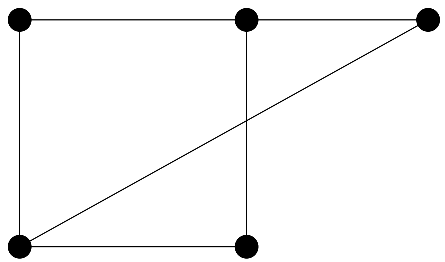
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng

References

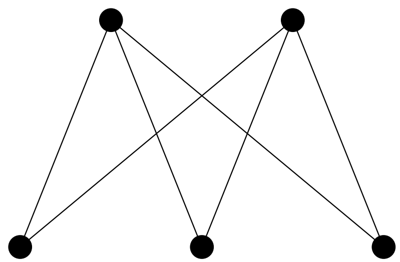
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Bài tập 11

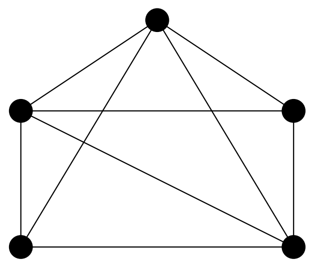
Tìm một biểu diễn phẳng của các đồ thị phẳng sau



G_1



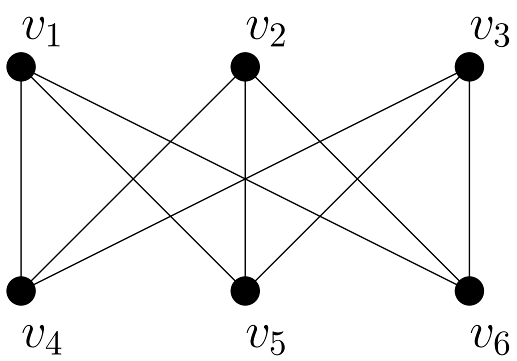
G_2



G_3

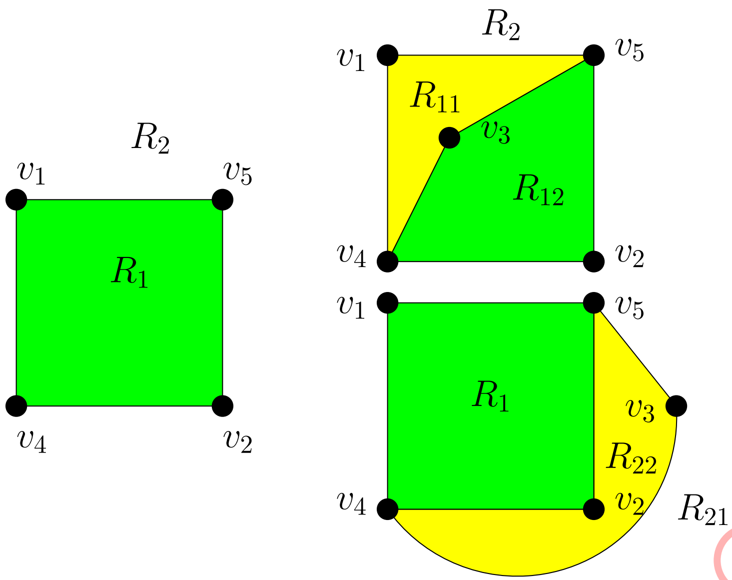
Ví dụ 5

$K_{3,3}$ không là đồ thị phẳng



Ta chứng minh khẳng định trên bằng phản chứng. Giả sử $K_{3,3}$ là đồ thị phẳng

- Trong bất kỳ biểu diễn phẳng nào của $K_{3,3}$ ta có v_1 và v_2 đều phải luôn nối với v_4 và v_5 Các đỉnh này chia mặt phẳng thành hai miền R_1 và R_2.
- Đỉnh v_3 thuộc R_1 hoặc R_2
- Vị trí của v_6?



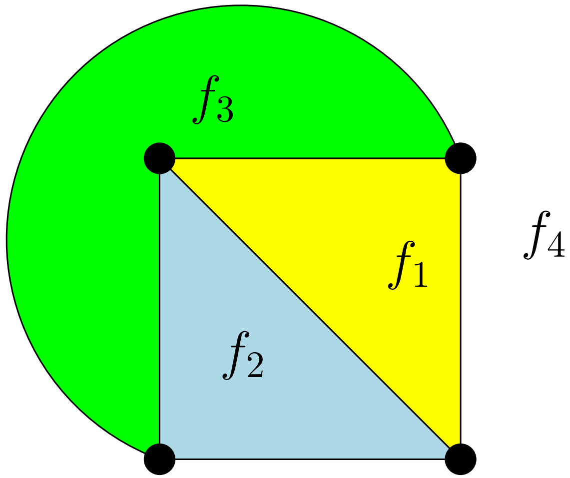
Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

- Biểu diễn phẳng của một đồ thị phẳng $G = (V, E)$ chia mặt phẳng thành các *miền (region)*, kể cả *miền vô hạn (unbounded region)*
- Hai điểm bất kỳ trong cùng một miền có thể được nối với nhau bằng một nét liền mà không cắt bất kỳ cạnh nào
- *Bậc (degree)* của một miền f, ký hiệu $\deg(f)$, là số cạnh của G trên biên của f

Ví dụ 6

Biểu diễn phẳng của K_4

- chia mặt phẳng thành 4 miền f_1, f_2, f_3, và f_4; và
- $\deg(f_1) = \deg(f_2) = \deg(f_3) = \deg(f_4) = 3$



- **Chú ý:** $\sum_{\text{miền } f \text{ của } G} \deg(f) \leq 2|E|$ (Mỗi cạnh thuộc tối đa hai miền)

Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Định lý 5: Công thức Euler

Giả sử G là một đơn đồ thị phẳng và liên thông gồm m cạnh, n đỉnh, và r miền. Ta có $n - m + r = 2$

Chứng minh.

- Xây dựng dãy đồ thị $G_1, G_2, \dots, G_m = G$
  - Chọn một cạnh bất kỳ của G làm G_1
  - G_i được tạo thành từ G_{i-1} bằng cách thêm một cạnh bất kỳ liên thuộc với một đỉnh của G_{i-1} $(i \in \{2, 3, \dots, m\})$
  - Gọi n_i, m_i, r_i lần lượt là số đỉnh, cạnh, và miền của một biểu diễn phẳng của G_i
- Công thức Euler đúng với mọi G_i
  - Ta có $n_1 - m_1 + r_1 = 2 - 1 + 1 = 2$
  - Giả sử công thức Euler đúng với G_i, tức là $n_i - m_i + r_i = 2$ Gọi $a_{i+1}b_{i+1}$ là cạnh thêm vào G_i để tạo thành G_{i+1}. Có hai khả năng:
    - một trong hai đỉnh a_{i+1}, b_{i+1} không thuộc G_{i-1}
    - cả a_{i+1} và b_{i+1} thuộc G_{i-1}

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Hệ quả 6

Giả sử G là một đồ thị phẳng liên thông gồm m cạnh và n đỉnh ($n \geq 3$). Khi đó, $m \leq 3n - 6$. Thêm vào đó, nếu $m = 3n - 6$ thì mỗi miền của G có chính xác 3 cạnh trên biên.

Chứng minh.

- Nhận xét rằng mỗi miền của G có ít nhất 3 cạnh trên biên, do đó $\sum_{\text{miền } f \text{ của } G} \deg(f) \geq 3r$. Mặt khác, ta cũng có $\sum_{\text{miền } f \text{ của } G} \deg(f) \leq 2m$. Suy ra $3r \leq 2m$.
- Áp dụng công thức Euler, ta có $2 = n - m + r \leq n - m + 2m/3$, suy ra $m \leq 3n - 6$.

$\square$

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Bài tập 12

Giả sử G là một đồ thị đơn phẳng và liên thông gồm 20 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc 3. Một biểu diễn phẳng của G chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

Bài tập 13

Chứng minh K_5 không là đồ thị phẳng

Bài tập 14

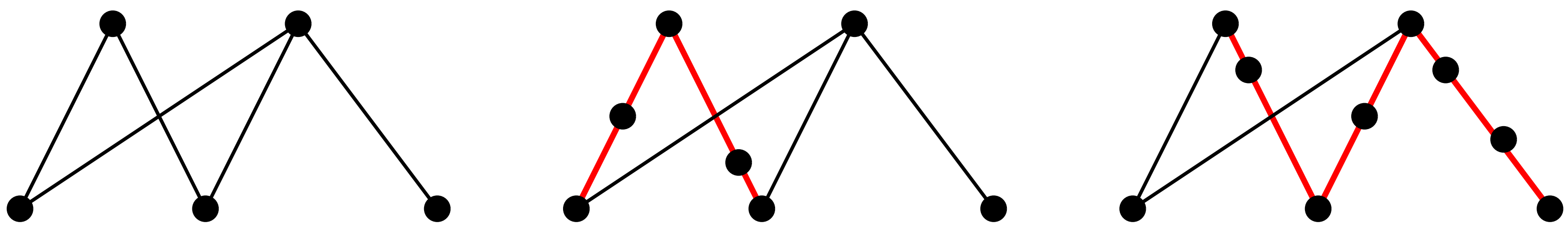
Chứng minh rằng nếu G là một đơn đồ thị phẳng và liên thông thì G có một đỉnh có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Đồ thị phẳng
Định lý Kuratowski

- Cho đồ thị G. Một *phép phân chia (subdivision)* một cạnh e của G được thực hiện bằng cách thay thế e bằng một đường đi đơn
- Hai đồ thị G_1 và G_2 được gọi là *đồng phôi (homeomorphic)* nếu chúng được xây dựng từ cùng một đồ thị thông qua một dãy các phép phân chia

Ví dụ 7



G $\quad$ G_1 $\quad$ G_2

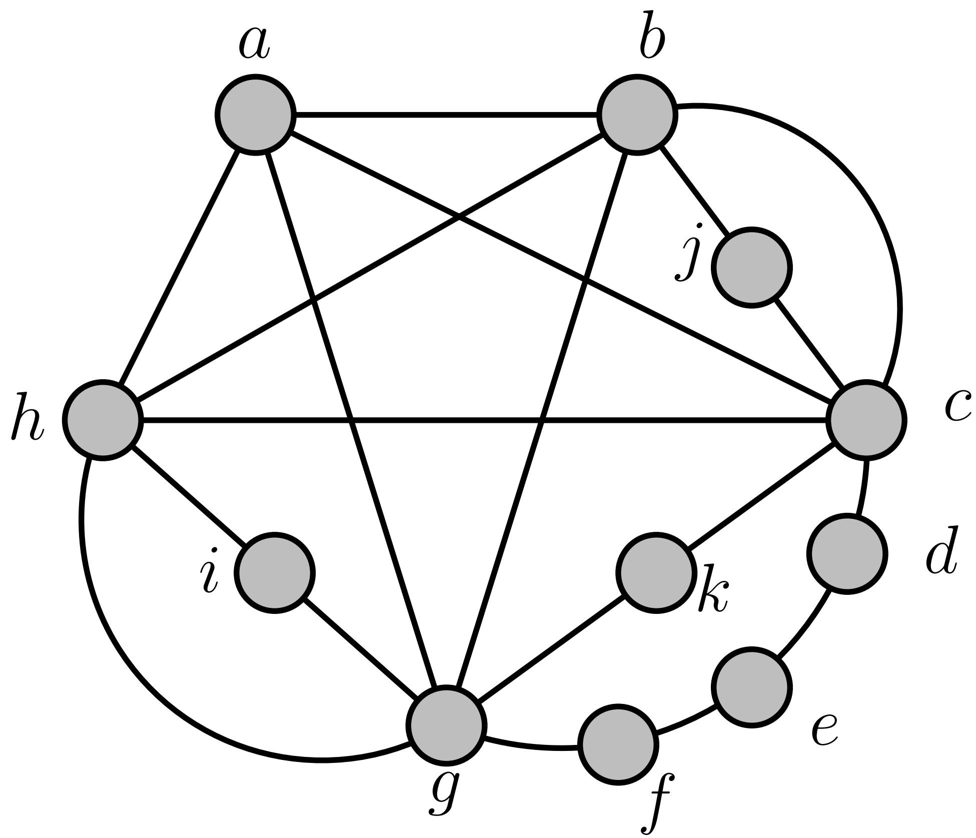
Định lý 7: Định lý Kuratowski

G là đồ thị phẳng khi và chỉ khi nó không chứa bất kỳ đồ thị nào đồng phôi với K_5 hoặc $K_{3,3}$

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
33 Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Bài tập 15

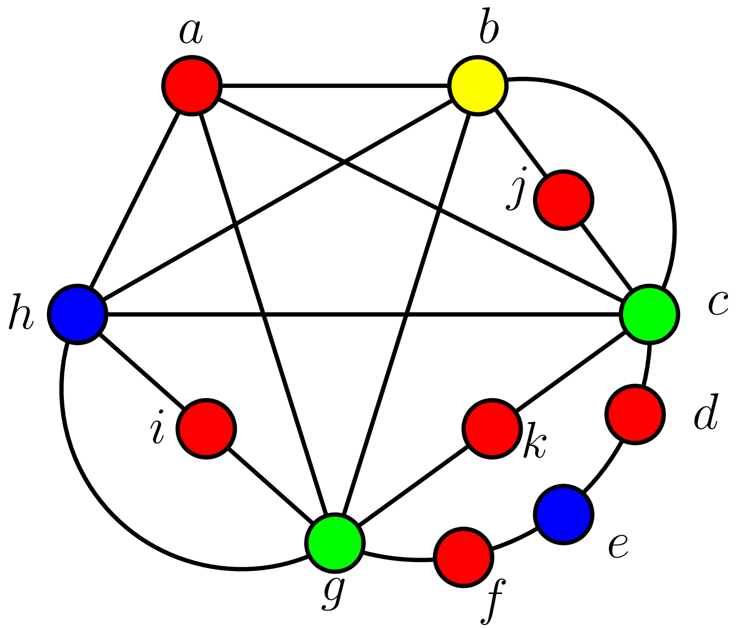
Sử dụng Định lý Kuratowski, hãy chứng minh đồ thị sau không là đồ thị phẳng



Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$

- *Tô màu* một đồ thị đơn là sự gán màu cho các đỉnh của đồ thị sao cho không có hai đỉnh liền kề được gán cùng một màu. Cụ thể, với các "màu" $1, 2, \dots, k$, một *cách tô màu các đỉnh (vertex k-coloring)* của G là một hàm $f : V \to \{1, 2, \dots, k\}$ thỏa mãn $f(u) \neq f(v)$ với mọi $u, v \in V$ với $uv \in E$



- *Sắc số (chromatic number)* của G, ký hiệu $\chi(G)$, là số tối thiểu các màu cần thiết để tô màu G

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra

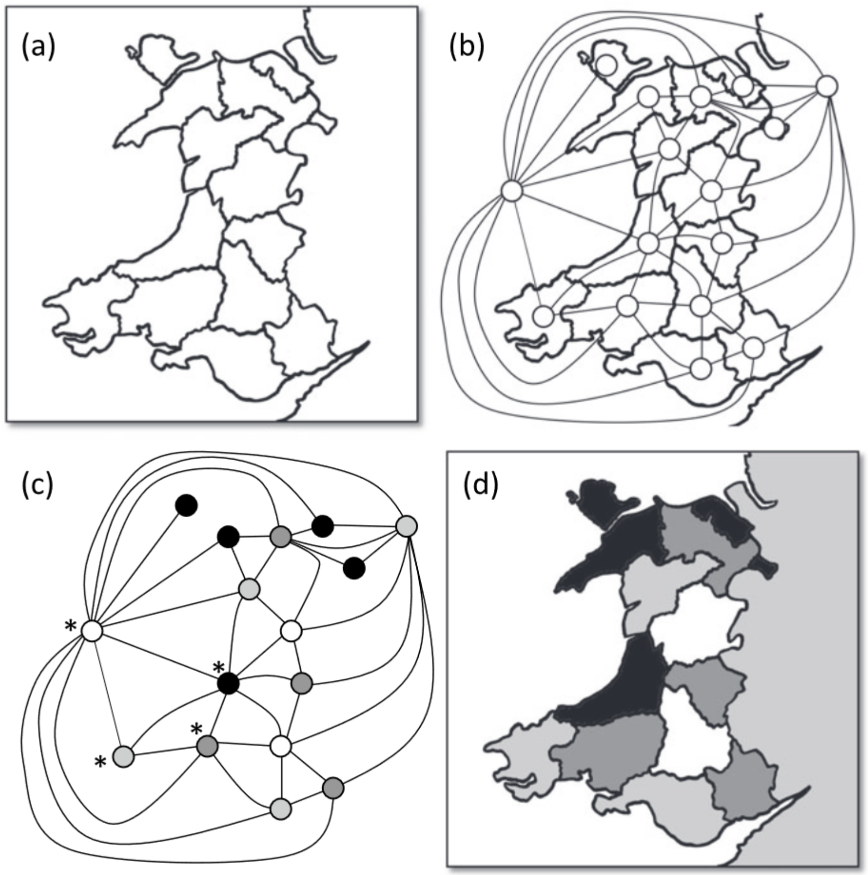
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng

References

Tô màu đồ thị
Giới thiệu

Ghi chép sớm nhất về bài toán tô màu đồ thị có lẽ là vào năm 1852 khi Francis Guthrie (1831–1899), lúc đó là một sinh viên ở Đại học Cao đẳng London (University College London), tô màu một bản đồ các quận của Anh và nhận ra là có lẽ chỉ cần bốn màu để tô màu bản đồ sao cho hai quận liền kề nhau có màu khác nhau



Hình: [Lewis 2021], Hình 1.7

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
36
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

- Phỏng đoán của Guthrie được cho là phát biểu đầu tiên của *Định lý bốn màu (Four Color Theorem)*

Định lý 8: Định lý bốn màu

Với mọi đồ thị phẳng G, ta luôn có $\chi(G) \leq 4$

- Năm 1879, Kempe đề xuất một chứng minh cho Định lý bốn màu. Khoảng 10 năm sau đó, Heawood chỉ ra lỗi sai trong chứng minh của Kempe và chỉnh sửa lại chứng minh của Kempe để chỉ ra rằng năm màu là đủ để tô màu bất kỳ đồ thị phẳng nào
- Năm 1976, Kenneth Appel and Wolfgang Haken (Đại học Illinois) [Appel and Haken 1977]; [Appel, Haken, and Koch 1977] chứng minh định lý bốn màu bằng cách giả sử nếu Định lý bốn màu là sai thì sẽ có một phản ví dụ thuộc một trong 1936 loại khác nhau, và chỉ ra rằng không có loại nào dẫn đến phản ví dụ. Các trường hợp này được phân tích cẩn thận nhờ máy tính
- Robertson, Sanders, Seymour, và Thomas [Robertson, Sanders, Seymour, and Thomas 1997] đưa ra một chứng minh đơn giản hơn với 633 loại cần kiểm tra

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Tô màu đồ thị
Một số tính chất cơ bản

- Để *chỉ ra $\chi(G) = k$ với đồ thị G nào đó*, ta cần:
  - Chỉ ra một cách tô màu các đỉnh của G bằng k màu.
  - Chỉ ra rằng không thể dùng ít hơn k màu để tô màu các đỉnh của G.
- Một số nhận xét
  (1) Mọi đồ thị G gồm n đỉnh có thể được tô màu bằng n màu
  (2) $\chi(K_n) = n$ (Tại sao?)
  (3) Ta ký hiệu $\omega(G)$ là số nguyên dương lớn nhất $r \geq 1$ thỏa mãn K_r là đồ thị con của G. Với mọi đồ thị G, ta có $\omega(G) \leq \chi(G)$. Thông thường, $\omega(G) \neq \chi(G)$
  (4) $\chi(C_n) = 2$ nếu $n \geq 4$ chẵn và $\chi(C_n) = 3$ nếu $n \geq 3$ lẻ (Tại sao?)
  (5) G là đồ thị hai phần khi và chỉ khi $\chi(G) = 2$ (Tại sao?)
- *Chưa biết* có tồn tại hay không một thuật toán chạy trong thời gian đa thức để xác định xem một đồ thị G có thể được tô màu bằng 3 màu hay không

Bài tập 16

Tính $\chi(W_n)$, $\chi(K_{m,n})$, *và* $\chi(Q_n)$

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Gọi $\Delta(G)$ là *bậc lớn nhất của các đỉnh của đồ thị G*

Định lý 9

Cho $G = (V, E)$ là đơn đồ thị vô hướng có n đỉnh. Ta có $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Chứng minh.

Một thuật toán tham lam để tô màu các đỉnh của G bằng $\Delta(G) + 1$ màu $\{1, \dots, \Delta(G) + 1\}$ là như sau:

1. Gán nhãn $v_1, v_2, \dots, v_n$ cho các đỉnh của G một cách tùy ý
2. Với i từ 1 đến n, tô màu đỉnh v_i bằng màu nhỏ nhất trong số các màu chưa được tô cho bất kỳ đỉnh nào trong $N(v_i)$

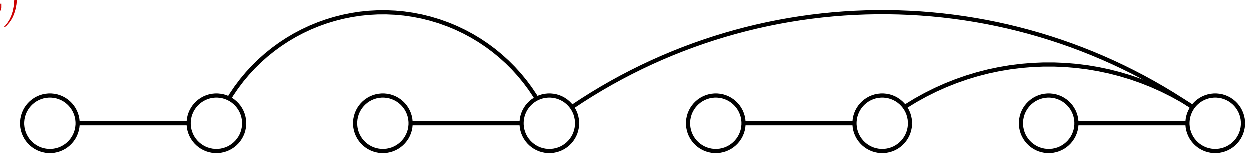
Ta chứng minh rằng *Bước 2 của thuật toán luôn thực hiện được với $\Delta(G) + 1$ màu*. Thật vậy, đỉnh v_i có tối đa $\Delta(G)$ đỉnh kề với nó, do đó số màu tối đa sử dụng để tô màu các đỉnh trong $N(v_i)$ là $\Delta(G)$, nghĩa là luôn có ít nhất một trong số $\Delta(G) + 1$ màu không được sử dụng cho bất kỳ đỉnh nào kề với v_i, và ta có thể tô màu v_i bằng màu nhỏ nhất trong số các màu này $\square$

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

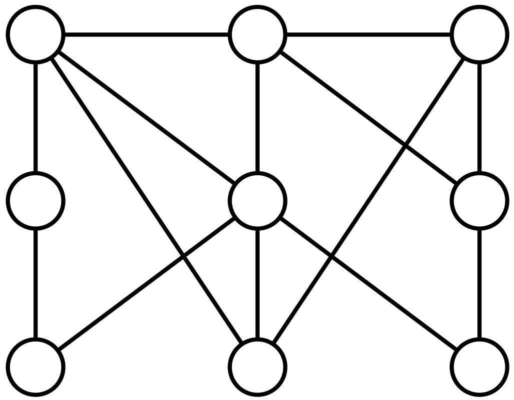
Bài tập 17

Sử dụng thuật toán ở Định lý 9 để tô màu các đồ thị sau

(a)



(b)



Trên thực tế, với phần lớn các đồ thị, chỉ cần $\Delta(G)$ màu là đủ

Định lý 10: Định lý Brook

Nếu G không phải là một chu trình độ dài lẻ hoặc một đồ thị đầy đủ thì $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
40 Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

Bổ đề 11

Mọi đơn đồ thị phẳng và liên thông G gồm n đỉnh có một cách sắp thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ sao cho mỗi đỉnh kề với tối đa 5 đỉnh đứng trước nó

Chứng minh.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n.

- **Bước cơ sở:** Với $n \leq 6$, bất kể thứ tự sắp xếp các đỉnh nào đều thỏa mãn Bổ đề
- **Bước quy nạp:**
  - Giả sử Bổ đề đúng với mọi $6 \leq n \leq k$, trong đó $k \geq 6$ là một số nguyên nào đó. Ta chứng minh Bổ đề đúng với $n = k + 1$.
  - Thật vậy, giả sử G là đồ thị bất kỳ gồm $k + 1$ đỉnh. Từ Bài tập 14, tồn tại một đỉnh v của G thỏa mãn $\deg(v) \leq 5$.
  - Đồ thị $G - v$:
    - có tối đa 5 thành phần liên thông $G_1, G_2, \dots, G_5$
    - mỗi G_i có $n_i \leq k$ đỉnh $(1 \leq i \leq 5)$
    - và $n_1 + \cdots + n_5 = k$
  - Từ giả thiết quy nạp, tồn tại một thứ tự $v_1, \dots, v_k$ các đỉnh của $G - v$ thỏa mãn Bổ đề.
  - Đặt $v_{k+1} = v$, ta có $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ là một thứ tự các đỉnh của G thỏa mãn Bổ đề

□

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra

Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski

Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng

References

Định lý 12

Mọi đồ thị phẳng G có $\chi(G) \leq 6$

Chứng minh.

Ta chỉ ra một cách tô màu đơn đồ thị phẳng và liên thông G bằng 6 màu

1. Tìm thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ của G thỏa mãn Bổ đề 11: mỗi đỉnh có tối đa 5 đỉnh kề đứng trước nó
2. Áp dụng thuật toán tham lam ở Định lý 9 với thứ tự đỉnh tìm được ở Bước 1

Chú ý rằng

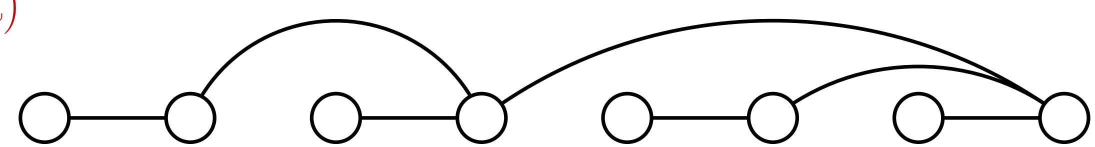
- Khuyên và cạnh song song (nếu có) không ảnh hưởng gì đến quá trình tô màu
- Nếu đồ thị phẳng đã cho không liên thông, ta có thể áp dụng quá trình tô màu riêng biệt cho từng thành phần liên thông

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
References

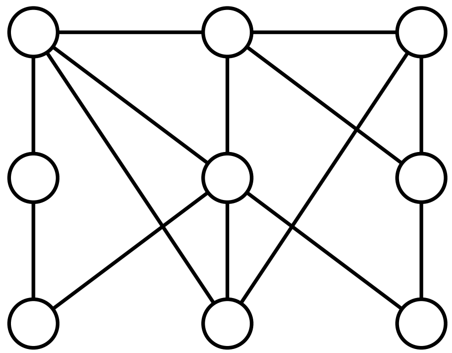
Bài tập 18

Sử dụng thuật toán ở Định lý 12 để tô màu các đồ thị phẳng sau bằng 6 màu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(a)



(b)



Nếu có thể, hãy tìm một cách tô màu các đồ thị trên bằng 5 màu hoặc ít hơn

Bài tập 19

*Chứng minh Định lý 12 bằng phương pháp quy nạp. (**Gợi ý:** Xem lại chứng minh Bổ đề 11)*

Tài liệu tham khảo

- Lewis, Rhyd M. R. (2021). *Guide to Graph Colouring: Algorithms and Applications*. 2nd. Springer. DOI: 10.1007/978-3-030-81054-2.
- Rosen, Kenneth (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications*. 7th. McGraw-Hill.
- Robertson, Neil, Daniel Sanders, Paul Seymour, and Robin Thomas (1997). "The four-colour theorem". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70.1, pp. 2–44. DOI: 10.1006/jctb.1997.1750.
- Appel, Kenneth and Wolfgang Haken (1977). "Every planar map is four colorable. Part I: Discharging". In: *Illinois Journal of Mathematics* 21.3, pp. 429–490. DOI: 10.1215/ijm/1256049011.

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
44 References

Tài liệu tham khảo (tiếp)

Appel, Kenneth, Wolfgang Haken, and John Koch (1977). "Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility". In: *Illinois Journal of Mathematics* 21.3, pp. 491–567. DOI: 10.1215/ijm/1256049012.

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton
Bài toán đường đi ngắn nhất
Đồ thị có trọng số
Thuật toán Dijkstra
Đồ thị phẳng
Định nghĩa và khái niệm
Công thức Euler
Định lý Kuratowski
Tô màu đồ thị
Giới thiệu
Một số tính chất cơ bản
Tô màu đồ thị phẳng
45 References