ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 4 câu/4 trang)

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ
Môn: Toán rời rạc (MAT3500, Hè 2023-2024)
Thời gian: 50 phút

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học.

Họ và Tên: ____________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	3	2	3	2	10
Điểm:					

1. Cho các mệnh đề p, q, r, và s.
   (a) (1 điểm) Chứng minh rằng các mệnh đề $(p \to q) \wedge (p \to r)$ và $p \to (q \wedge r)$ là tương đương lôgic.
   (b) (1 điểm) Chứng minh rằng mệnh đề $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ là một hằng đúng.
   (c) (1 điểm) Chứng minh rằng các mệnh đề $(p \to q) \to (r \to s)$ và $(p \to r) \to (q \to s)$ không tương đương lôgic.

Lời giải:

(a) Ta có

$$
\begin{aligned}
(p \to q) \wedge (p \to r) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) && p \to q \equiv \neg p \vee q \\
&\equiv ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee ((\neg p \vee q) \wedge r) && \text{Luật phân phối} \\
&\equiv \neg p \vee ((\neg p \vee q) \wedge r) && \text{Luật hấp thụ} \\
&\equiv (\neg p \vee (\neg p \vee q)) \wedge (\neg p \vee r) && \text{Luật phân phối} \\
&\equiv ((\neg p \vee \neg p) \vee q) \wedge (\neg p \vee r) && \text{Luật kết hợp} \\
&\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) && \text{Luật lũy đẳng} \\
&\equiv \neg p \vee (q \wedge r) && \text{Luật phân phối} \\
&\equiv p \to (q \wedge r) && p \to q \equiv \neg p \vee q
\end{aligned}
$$

(b) Ta xây dựng bảng chân trị cho mệnh đề $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ như sau.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \land (q \to r)$	$(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

Từ bảng chân trị, mệnh đề $(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$ là một hằng đúng.

(c) Ngoài cách lập bảng chân trị, có thể lý luận như sau. Chú ý là mệnh đề $p \to q$ chỉ sai khi $p = \mathsf{T}$ và $q = \mathsf{F}$. Để chứng minh hai mệnh đề $(p \to q) \to (r \to s)$ và $(p \to r) \to (q \to s)$ không tương đương lôgic, ta cần chọn các giá trị chân lý cho p, q, r, s sao cho một mệnh đề đúng và mệnh đề kia sai.

- Để một trong hai mệnh đề đã cho là sai, ta có thể chọn sao cho $p \to q = p \to r = \mathsf{T}$ và sau đó chọn sao cho $q \to s$ và $r \to s$ có giá trị chân lý khác nhau. Đơn giản nhất là chọn $p = \mathsf{F}$.
- Tiếp theo, ta muốn chọn sao cho $q \to s$ và $r \to s$ có giá trị chân lý khác nhau. Như vậy, giá trị của q và r phải khác nhau. Nghĩa là nếu $q = \mathsf{T}$ thì $r = \mathsf{F}$ và nếu $q = \mathsf{F}$ thì $r = \mathsf{T}$.
- Thêm vào đó, do ít nhất một trong hai mệnh đề $q \to s$ và $r \to s$ phải có giá trị chân lý là F, bắt buộc ta phải chọn $s = \mathsf{F}$.

Tóm lại, có thể chọn $p = s = \mathsf{F}$ và sau đó chọn $q = \mathsf{T}$, $r = \mathsf{F}$ hoặc $q = \mathsf{F}$ và $r = \mathsf{T}$.

2. (2 điểm) Sử dụng phương pháp quy nạp, hãy chứng minh rằng $2^{3n} - 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải: Gọi $P(n)$ là vị từ "$2^{3n} - 1$ chia hết cho 7". Ta chứng minh $\forall n\, P(n)$ bằng phương pháp quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, với $n = 0$, ta có $2^{3n} - 1 = 2^0 - 1 = 0$ chia hết cho 7.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^{3k} - 1$ chia hết cho 7. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^{3(k+1)} - 1$ chia hết cho 7. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, $2^{3k} - 1$ chia hết cho 7. Do đó, $2^{3(k+1)} - 1 = 2^3(2^{3k} - 1) + 7$ cũng chia hết cho 7.

Bằng phương pháp quy nạp, ta đã chứng minh $2^{3n} - 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}$.

3. (3 điểm) Sử dụng phương pháp quy nạp yếu, hãy chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 14$, tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 8b$. (**Chú ý:** Chứng minh bằng quy nạp mạnh cũng được chấp nhận, nhưng sẽ chỉ được tính tối đa 2 điểm.)

Lời giải: Ta chứng minh phát biểu $P(n) :=$ "tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 8b$" bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(14)$ đúng. Thật vậy, $14 = 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 14$ nào đó, $P(k)$ đúng, nghĩa là tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $k = 3a + 8b$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh tồn tại $c, d \in \mathbb{N}$ sao cho $k + 1 = 3c + 8d$.

  Từ giả thiết quy nạp, ta có $k + 1 = 3a + 8b + 1 = 3(a + 3) + 8(b - 1)$.

  Với $b \geq 1$, $P(k+1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a + 3 \in \mathbb{N}$ và $d = b - 1 \in \mathbb{N}$.

  Với $b = 0$, do $14 \leq k = 3a + 8b = 3a$ và $a \in \mathbb{N}$, ta có $a \geq 5$. Ta cũng có $k + 1 = 3a + 1 = 3(a - 5) + 8 \cdot 2$. Suy ra $P(k+1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a - 5 \in \mathbb{N}$ và $d = 2 \in \mathbb{N}$.

Theo nguyên lý quy nạp yếu, với mọi số nguyên $n \geq 14$, tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 8b$.

Chú ý: Một phương án khác để chứng minh $P(k) \to P(k+1)$ là như sau:

Từ giả thiết quy nạp, ta có $k + 1 = 3a + 8b + 1 = 3(a - 5) + 8(b + 2)$.

Với $a \geq 5$, $P(k+1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a - 5 \in \mathbb{N}$ và $d = b + 2 \in \mathbb{N}$.

Với $0 \leq a \leq 4$, do $14 \leq k = 3a + 8b \leq 12 + 8b$ và $b \in \mathbb{N}$, ta có $b \geq 1$, hay $b - 1 \in \mathbb{N}$. Ta cũng có $k+1 = 3a+8b+1 = 3(a+3)+8(b-1)$. Suy ra $P(k+1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a+3 \in \mathbb{N}$ và $d = b - 1 \in \mathbb{N}$.

4. (2 điểm) Tìm công thức tường minh của tổng sau cho mọi số nguyên $n \geq 1$.

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}. \tag{1}$$

Lời giải:

Cách 1: Với mọi $n \geq 1$, ta có

$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} && (2)\\
\frac{1}{2}T_n &= \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}} && \text{Nhân hai vế của (2) với 1/2} \quad (3)\\
\frac{1}{2}T_n &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} && \text{Lấy (2) - (3)} \quad (4)\\
\frac{1}{4}T_n &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^{n+2}} && \text{Nhân hai vế của (4) với 1/2} \quad (5)\\
\frac{1}{4}T_n &= \frac{1}{2^1} - \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{n}{2^{n+2}} && \text{Lấy (4) - (5)} \quad (6)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{2n+2-n}{2^{n+2}} && (7)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{n+2}{2^{n+2}} && (8)\\
T_n &= 2 - \frac{n+2}{2^n}. && \text{Nhân hai vế của (8) với 4} \quad (9)
\end{aligned}
$$

Cách 2: Dãy $\{T_n\}$ được xác định bởi hệ thức truy hồi $T_n = T_{n-1} + \frac{n}{2^n}$ $(n \geq 2)$ và điều kiện ban đầu $T_1 = 1/2$.

Hệ thức $T_n = T_{n-1} + \frac{n}{2^n}$ $(n \geq 2)$ $(\star)$ là một hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất bậc một với hệ số hằng và có hệ thức thuần nhất tương ứng là $T_n = T_{n-1}$ $(\star\star)$. Hệ thức thuần nhất $(\star\star)$ có đa thức đặc trưng là $r - 1$. Đa thức này có nghiệm duy nhất $r = 1$. Do đó, nghiệm của $(\star\star)$ có dạng $T_n^{(h)} = c \cdot 1^n = c$, với c là hằng số nào đó.

Ta có $n/(2^n) = (1 \cdot n + 0) \cdot (1/2)^n$. Do $1/2$ không là nghiệm đặc trưng của $(\star\star)$, một nghiệm riêng $T_n^{(p)}$ của $(\star)$ có dạng $T_n^{(p)} = (p_0 n + p_1)(1/2)^n$ $(n \geq 1)$. Do $T_n^{(p)}$ là nghiệm của $(\star)$, ta có

$$
\begin{aligned}
&\frac{p_0 n + p_1}{2^n} = \frac{p_0(n-1) + p_1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{p_0 n + p_1}{2^n} = \frac{2(p_0(n-1) + p_1) + n}{2^n}\\
\Leftrightarrow\ &p_0 n + p_1 = 2p_0 n - 2p_0 + 2p_1 + n\\
\Leftrightarrow\ &(p_0 + 1)n + (p_1 - 2p_0) = 0.
\end{aligned}
$$

Suy ra $p_0 + 1 = 0$ và $p_1 - 2p_0 = 0$, nghĩa là $p_0 = -1$ và $p_1 = -2$. Do đó, $T_n^{(p)} = \frac{-n-2}{2^n}$.

Mọi nghiệm của $(\star)$ có dạng $T_n = T_n^{(h)} + T_n^{(p)} = c + \frac{-n-2}{2^n}$ $(n \geq 1)$. Ta cũng có $T_1 = c + \frac{-1-2}{2^1} = \frac{1}{2}$. Suy ra $c = 2$. Do đó, $T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ với mọi $n \geq 1$.