ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 4 câu/4 trang)

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ
Môn: Toán rời rạc (MAT3500, Hè 2023-2024)
Thời gian: 50 phút

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	2	2	3	3	10
Điểm:					

1. Cho các mệnh đề p, q, và r.
   (a) (1 điểm) Chứng minh rằng các mệnh đề $(p \to r) \wedge (q \to r)$ và $(p \vee q) \to r$ là tương đương lôgic.
   (b) (1 điểm) Chứng minh rằng các mệnh đề $(p \wedge q) \to r$ và $p \to (q \to r)$ là tương đương lôgic.

Lời giải:

(a) Ta có

$$\begin{aligned}
(p \to r) \wedge (q \to r) &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && p \to q \equiv \neg p \vee q \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r && \text{Luật phân phối} \\
&\equiv \neg(p \vee q) \vee r && \text{Luật De Morgan} \\
&\equiv (p \vee q) \to r && p \to q \equiv \neg p \vee q
\end{aligned}$$

(b) Ta có

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \to r &\equiv \neg(p \wedge q) \vee r && p \to q \equiv \neg p \vee q \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee r && \text{Luật De Morgan} \\
&\equiv \neg p \vee (\neg q \vee r) && \text{Luật kết hợp} \\
&\equiv p \to (\neg q \vee r) && p \to q \equiv \neg p \vee q \\
&\equiv p \to (q \to r) && p \to q \equiv \neg p \vee q
\end{aligned}$$

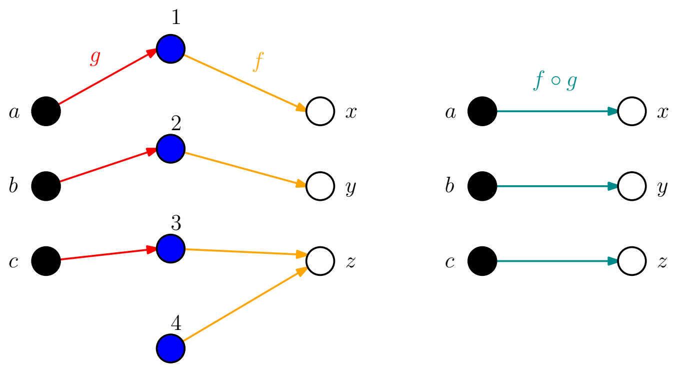
2. (a) (1 điểm) Hãy cho ví dụ về các hàm f và g thỏa mãn điều kiện $f \circ g$ là song ánh nhưng f không là đơn ánh và g không là toàn ánh.

   (b) (1 điểm) Tìm các tập hợp A, B thỏa mãn hai điều kiện sau

$$A = \{3, |B|\}, \tag{1}$$
$$B = \{1, |A|, |B|\}. \tag{2}$$

Lời giải:

(a) Ví dụ, ta định nghĩa các hàm f và g như hình sau



(b) Chú ý rằng $1 \le |A| \le 2$ và $1 \le |B| \le 3$.

Trước tiên, ta xét trường hợp $|A| = 1$. Từ $|A| = 1$ và (1), ta có $|B| = 3$. Từ $|A| = 1$ và (2), ta có $|B| \le 2$. Đây là một mâu thuẫn. Do đó, $|A| = 2$.

Từ $|A| = 2$ và (1), ta có $|B| \ne 3$, nghĩa là $1 \le |B| \le 2$. Từ $|A| = 2$ và (2), ta có $B = \{1, 2, |B|\}$, nghĩa là $|B| \ge 2$. Do đó, $|B| = 2$.

Tóm lại, ta có $A = \{3, 2\}$ và $B = \{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$.

3. (3 điểm) Dãy Fibonacci $\{f_n\}$ được cho bởi hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$ và điều kiện ban đầu $f_0 = 0$ và $f_1 = 1$. Sử dụng phương pháp quy nạp, chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$,

$$f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}. \tag{3}$$

Lời giải: Ta chứng minh (3) đúng với mọi $n \geq 1$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh với $n = 1$, (3) đúng.

  Thật vậy, với $n = 1$, (3) tương đương với $f_1^2 = f_1 f_2$. Do $f_1 = f_2 = 1$, ta có $f_1^2 = f_1 f_2 = 1$. Do đó, (3) đúng.

- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, (3) đúng với $n = k$, nghĩa là $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_k^2 = f_k f_{k+1}$. Ta chứng minh (3) đúng với $n = k + 1$, nghĩa là chứng minh $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_{k+1} f_{k+2}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_k^2 + f_{k+1}^2 &= f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 && \text{Giả thiết quy nạp} \\
&= f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) \\
&= f_{k+1} f_{k+2}. && \text{Định nghĩa dãy Fibonacci}
\end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

4. (3 điểm) Sử dụng phương pháp quy nạp yếu, hãy chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 6$, tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 2a + 7b$. (**Chú ý:** Chứng minh bằng quy nạp mạnh cũng được chấp nhận, nhưng sẽ chỉ được tính tối đa 2 điểm.)

Lời giải: Ta chứng minh phát biểu $P(n) :=$ "tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 2a + 7b$" bằng quy nạp yếu.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(6)$ đúng. Thật vậy, $6 = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, nghĩa là tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $k = 2a + 7b$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh tồn tại $c, d \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $k + 1 = 2c + 7d$.

  Từ giả thiết quy nạp, ta có $k + 1 = 2a + 7b + 1 = 2(a - 3) + 7(b + 1)$.

  Với $a \geq 3$, $P(k + 1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a - 3 \in \mathbb{N}$ và $d = b + 1 \in \mathbb{N}$.

  Với $0 \leq a \leq 2$, do $6 \leq k = 2a + 7b \leq 4 + 7b$ và $b \in \mathbb{N}$, ta có $b \geq 1$, hay $b - 1 \in \mathbb{N}$. Ta cũng có $k + 1 = 2a + 7b + 1 = 2(a + 4) + 7(b - 1)$. Suy ra $P(k + 1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a + 4 \in \mathbb{N}$ và $d = b - 1 \in \mathbb{N}$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Chú ý: Một phương án khác để chứng minh $P(k) \to P(k + 1)$ là như sau:

Từ giả thiết quy nạp, ta có $k + 1 = 2(a + 4) + 7(b - 1)$.

Với $b \geq 1$, $P(k + 1)$ đúng do ta có thể chọn $c = a + 4 \in \mathbb{N}$ và $d = b - 1 \in \mathbb{N}$.

Với $b = 0$, do $6 \leq k = 2a + 7b = 2a$, ta có $a \geq 3$, hay $a - 3 \in \mathbb{N}$. Ta cũng có $k + 1 = 2a + 7b + 1 = 2(a - 3) + 7 \cdot 1$. Suy ra $P(k + 1)$ đúng, do ta có thể chọn $c = a - 3 \in \mathbb{N}$ và $d = 1 \in \mathbb{N}$.