ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ HÈ
NĂM HỌC 2023-2024

——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **2**

Lớp học phần: **MAT3500** Ngành học: **KHDL**

Thời gian làm bài: **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

Chú ý: Đề gồm 5 câu/2 trang. Không sử dụng tài liệu. Điểm bài kiểm tra này chiếm 60% tổng số điểm của môn học. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1. (2 điểm)

(a) Cho các mệnh đề p, q, và r. Các mệnh đề $p \to (q \vee r)$ và $(p \to q) \vee (p \to r)$ có tương đương lôgic không? Tại sao?

(b) Giả sử $x_3x_2x_1x_0$ ($x_i \in \{0,1\}$ với $i \in \{0,1,2,3\}$) là một biểu diễn nhị phân của một số tự nhiên $x \in \mathbb{N}$. (Nghĩa là, $x = (x_3x_2x_1x_0)_2$.) Nếu như ta coi 0 là F và 1 là T, ta có thể biểu diễn một tính chất của x thông qua mệnh đề lôgic với $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ và các toán tử lôgic đã biết. Phương thức tương tự được sử dụng trong quá trình thiết kế các mạch lôgic trong máy tính để thực hiện các phép toán số học một cách nhanh chóng.

Ví dụ, để biểu diễn tính chất "$x = 0$" (chú ý là $0 = (0000)_2$), ta sẽ tìm một mệnh đề phức hợp A của $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ thỏa mãn điều kiện: A đúng khi và chỉ khi $x_3 = x_2 = x_1 = x_0 = 0\,(= \mathsf{F})$. Một mệnh đề thỏa mãn điều kiện trên là $A = \neg x_3 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_0$.

Hãy tìm mệnh đề phức hợp của $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ biểu diễn tính chất "$x \geq 9$".

Câu 2. (2 điểm) Cho số nguyên dương n. Với những giá trị nào của n thì luôn tồn tại các số nguyên không âm a, b thỏa mãn $n = 2a + 5b$? Chứng minh phỏng đoán của bạn bằng phương pháp quy nạp mạnh.

Câu 3. (2 điểm)

(a) Sử dụng Định lý Fermat nhỏ để tính $a_1 = 9^{2024} \bmod 7$, $a_2 = 9^{2024} \bmod 11$, và $a_3 = 9^{2024} \bmod 23$.

(b) Giải hệ phương trình đồng dư

$$x \equiv a_1 \pmod{7} \quad (1)$$
$$x \equiv a_2 \pmod{11} \quad (2)$$
$$x \equiv a_3 \pmod{23} \quad (3)$$

trong đó a_1, a_2, a_3 là các số được tính ở phần (a). Sử dụng kết quả trên và Định lý phần dư Trung Hoa để tính $9^{2024} \bmod 1771$. (Chú ý rằng $1771 = 7 \times 11 \times 23$.)

Câu 4. (2 điểm)

(a) Có bao nhiêu số có ba chữ số chia hết cho 5 hoặc chia hết cho 7?

(b) Có bao nhiêu số có ba chữ số có tổng các chữ số bằng 12?

Câu 5. (2 điểm)

(a) Đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có 6 đỉnh với bậc của các đỉnh lần lượt là $1, 2, 2, 3, 3, 5$. Đồ thị G có bao nhiêu cạnh? Nếu G là đồ thị phẳng và liên thông thì một biểu diễn phẳng của G chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền? G có đường đi Euler không? G có chu trình Hamilton không?

(b) Chứng minh rằng trong một đơn đồ thị vô hướng G bất kỳ gồm $n \geq 2$ đỉnh, luôn tìm được hai đỉnh có cùng bậc.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ HÈ, NĂM HỌC 2023-2024
Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **2**
Lớp học phần: **MAT3500** Ngành học: **KHDL**

Lời giải 1. [**2** điểm]

(a) $p \to (q \vee r)$ và $(p \to q) \vee (p \to r)$ tương đương lôgic. Cụ thể $$\begin{aligned} p \to (q \vee r) &\equiv \neg p \vee (q \vee r) && p \to q \equiv \neg p \vee q \\ &\equiv (\neg p \vee \neg p) \vee (q \vee r) && \text{Luật lũy đẳng} \\ &\equiv (\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r) && \text{Luật phân phối} \\ &\equiv (p \to q) \vee (p \to r) && p \to q \equiv \neg p \vee q \end{aligned}$$	**1**
(b) Với mọi số $x \geq 9$, trong biểu diễn nhị phân $x_3x_2x_1x_0$ của x, ta cần $x_3 = 1$ và $x_0 = 1$ hoặc $x_3 = 1$ và $x_1 = 1$ hoặc $x_3 = 1$ và $x_2 = 1$. (Khi đó, trong trường hợp thứ nhất, $x = x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 \geq 2^3 + 2^0 = 9$. Trong trường hợp thứ hai, $x = x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 \geq 2^3 + 2^1 = 10 > 9$. Trong trường hợp thứ ba, $x = x_3 \cdot 2^3 + x_2 \cdot 2^2 + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 \geq 2^3 + 2^2 = 12 > 9$.) Do đó, ta cần tìm một biểu thức B thỏa mãn điều kiện: B đúng khi và chỉ khi $x_3 = x_0 = 1$ $(= \mathsf{T})$ hoặc $x_3 = x_1 = 1$ $(= \mathsf{T})$ hoặc $x_3 = x_2 = 1$ $(= \mathsf{T})$. Một mệnh đề thỏa mãn điều kiện trên là $B = x_3 \wedge (x_2 \vee x_1 \vee x_0)$.	**1**

Lời giải 2. [**2** điểm]

Ta chứng minh bằng quy nạp mạnh rằng phát biểu $P(n) =$ "Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $n = 2a + 5b$" đúng với mọi $n \geq 4$.	**0.5**
Bước cơ sở: Ta chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, và $P(7)$ đúng. Thật vậy, ta có $$\begin{aligned} 4 &= 2 \cdot 2 + 5 \cdot 0, \\ 5 &= 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1, \\ 6 &= 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0, \\ 7 &= 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1. \end{aligned}$$	**0.5**
Bước quy nạp: Giả sử với số nguyên cố định $k \geq 7$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, \dots, k\}$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh tồn tại $c, d \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $k + 1 = 2c + 5d$. Thật vậy, ta có $k + 1 = (k - 3) + 2 \cdot 2$. Do $k \geq 7$, ta có $4 \leq k - 3 \leq k$. Theo giả thiết quy nạp, $P(k - 3)$ đúng, nghĩa là tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $k - 3 = 2a + 5b$. Do đó, $k + 1 = (k - 3) + 2 \cdot 2 = 2(a + 2) + 5b$. Chọn $c = a + 2 \in \mathbb{N}$ và $d = b \in \mathbb{N}$, ta có $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp mạnh, ta có điều phải chứng minh.	**1**

Lời giải 3. [**2** điểm]

(a) Theo định lý Fermat nhỏ, với p là số nguyên tố và a là số nguyên không chia hết cho p, ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Áp dụng định lý Fermat nhỏ, ta có $9^6 \equiv 1 \pmod{7}$, $9^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, và $9^{22} \equiv 1 \pmod{23}$. Do đó, $a_1 = 9^{2024} \bmod 7 = [(9^6)^{337} \cdot 9^2] \bmod 7 = 9^2 \bmod 7 = (9 \bmod 7)^2 \bmod 7 = 2^2 \bmod 7 = 4 \bmod 7 = 4,$ $a_2 = 9^{2024} \bmod 11 = [(9^{10})^{202} \cdot 9^4] \bmod 11 = 9^4 \bmod 11 = (9^2 \bmod 11)^2 \bmod 11 = 4^2 \bmod 11 = 5,$ $a_3 = 9^{2024} \bmod 23 = (9^{22})^{92} \bmod 23 = 1.$	**0.5**
(b) Ta giải hệ phương trình sau $x \equiv 4 \pmod{7}$ (1) $x \equiv 5 \pmod{11}$ (2) $x \equiv 1 \pmod{23}$ (3) **Cách 1: Sử dụng chứng minh của Định lý phần dư Trung Hoa.** Đặt $m_1 = 7$, $m_2 = 11$, $m_3 = 23$, và $m = m_1 m_2 m_3 = 7 \times 11 \times 23 = 1771$. Ta có • $M_1 = m/m_1 = 11 \times 23 = 253$ và $y_1 = 1$ là một nghịch đảo của M_1 theo môđun $m_1 = 7$. • $M_2 = m/m_2 = 7 \times 23 = 161$ và $y_2 = -3$ là một nghịch đảo của M_2 theo môđun $m_2 = 11$. • $M_3 = m/m_3 = 7 \times 11 = 77$ và $y_3 = 3$ là một nghịch đảo của M_3 theo môđun $m_3 = 23$. Nghiệm của hệ phương trình là mọi số nguyên x thỏa mãn $x \equiv \sum_{i=1}^{3} a_i y_i M_i \pmod{1771}$ $\equiv 4 \cdot 1 \cdot 253 + 5 \cdot (-3) \cdot 161 + 1 \cdot 3 \cdot 77 \pmod{1771}$ $\equiv -1172 \pmod{1771}$ $\equiv 599 \pmod{1771}.$ **Cách 2: Sử dụng phương pháp thay ngược.** Từ (1), tồn tại $t \in \mathbb{Z}$ sao cho $x = 7t + 4$. Thay vào (2), ta có $7t + 4 \equiv 5 \pmod{11}$, suy ra $t \equiv 8 \pmod{11}$. Do đó, tồn tại $u \in \mathbb{Z}$ sao cho $t = 11u + 8$. Suy ra $x = 7t + 4 = 7(11u + 8) + 4 = 77u + 60$. Thay vào (3), ta có $77u + 60 \equiv 1 \pmod{23}$, suy ra $u \equiv 7 \pmod{23}$. Do đó, tồn tại $v \in \mathbb{Z}$ sao cho $u = 23v + 7$. Suy ra $x = 77u + 60 = 77(23v + 7) + 60 = 1771v + 599$. Do đó, nghiệm của hệ phương trình có dạng $x = 1771v + 599$ với $v \in \mathbb{Z}$, hay nghiệm của hệ phương trình là các số nguyên x thỏa mãn $x \equiv 599 \pmod{1771}$.	**1**

Theo phần (a), 9^{2024} cũng là một nghiệm của hệ phương trình đã cho. Do đó, theo Định lý phần dư Trung Hoa, $9^{2024} \equiv 599 \pmod{1771}$, hay $9^{2024} \bmod 1771 = 599$.	**0.5**

Lời giải 4. **[2 điểm]**

(a) Do x là số có ba chữ số, ta có $100 \leq x \leq 999$. Gọi $A = \{x \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (100 \leq x \leq 999) \wedge (x \text{ chia hết cho } 5)\}$ và $B = \{x \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (100 \leq x \leq 999) \wedge (x \text{ chia hết cho } 7)\}$. Ta cần tính $\lvert A \cup B \rvert$. Theo nguyên lý bù trừ, $\lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cap B\rvert$. Ta có $$\begin{aligned} \lvert A\rvert &= \lvert\{x \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (100 \leq x \leq 999) \wedge (x \text{ chia hết cho } 5)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (100 \leq 5k \leq 999)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (\lceil 100/5 \rceil \leq k \leq \lfloor 999/5 \rfloor)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (20 \leq k \leq 199)\}\rvert \\ &= 180. \\ \lvert B\rvert &= \lvert\{x \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (100 \leq x \leq 999) \wedge (x \text{ chia hết cho } 7)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (100 \leq 7k \leq 999)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (\lceil 100/7 \rceil \leq k \leq \lfloor 999/7 \rfloor)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (15 \leq k \leq 142)\}\rvert \\ &= 128. \\ \lvert A \cap B\rvert &= \lvert\{x \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (100 \leq x \leq 999) \wedge (x \text{ chia hết cho cả } 5 \text{ và } 7)\}\rvert \\ &= \lvert\{x \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (100 \leq x \leq 999) \wedge (x \text{ chia hết cho } 35)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (100 \leq 35k \leq 999)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (\lceil 100/35 \rceil \leq k \leq \lfloor 999/35 \rfloor)\}\rvert \\ &= \lvert\{k \mid (k \in \mathbb{N}) \wedge (3 \leq k \leq 28)\}\rvert \\ &= 26. \end{aligned}$$ Do đó, $\lvert A \cup B\rvert = 180 + 128 - 26 = 282$.	**1**

(b) Gọi $x = x_1x_2x_3$ là một số có ba chữ số, trong đó $x_i \in \{0, \dots, 9\}$ $(i = 1, 2, 3)$ và $x_1 \neq 0$. **1**
Ta cần tính $|A|$ với

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1 + x_2 + x_3 = 12) \wedge (1 \leq x_1 \leq 9) \wedge (x_2 \leq 9) \wedge (x_3 \leq 9)\}.$$

Cách 1: Sử dụng nguyên lý bù trừ.
Đặt $x_1' = x_1 - 1$. Do $1 \leq x_1 \leq 9$, ta có $0 \leq x_1' \leq 8$. Ta cũng có $|A| = |A'|$ với

$$A' = \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 11) \wedge (x_1' \leq 8) \wedge (x_2 \leq 9) \wedge (x_3 \leq 9)\}.$$

Đặt

$$\begin{aligned}
U &= \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 11)\}, \\
A_1' &= \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 11) \wedge (x_1' \leq 8)\}, \\
A_2' &= \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 11) \wedge (x_2 \leq 9)\}, \\
A_3' &= \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 11) \wedge (x_3 \leq 9)\}.
\end{aligned}$$

Ta có $A' = A_1' \cap A_2' \cap A_3'$. Thêm vào đó, ta cũng có A_1', A_2', A_3' là các tập con của U và

$$\begin{aligned}
\overline{A_1'} &= U \setminus A_1' = \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 11) \wedge (x_1' \geq 9)\}, \\
\overline{A_2'} &= U \setminus A_2' = \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 11) \wedge (x_2 \geq 10)\}, \\
\overline{A_3'} &= U \setminus A_3' = \{(x_1', x_2, x_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x_1' + x_2 + x_3 = 11) \wedge (x_3 \geq 10)\}.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng $|A'| = |U| - |\overline{A'}| = |U| - |\overline{A_1' \cap A_2' \cap A_3'}| = |U| - |\overline{A_1'} \cup \overline{A_2'} \cup \overline{A_3'}|$. (Luật De Morgan cho ba tập hợp.) Do tổng của hai số lớn hơn hoặc bằng 9 bất kỳ luôn lớn hơn 12, ta có $\overline{A_i'} \cap \overline{A_j'} = \emptyset$ với $1 \leq i < j \leq 3$. Do đó, $|\overline{A_1'} \cup \overline{A_2'} \cup \overline{A_3'}| = |\overline{A_1'}| + |\overline{A_2'}| + |\overline{A_3'}|$. Suy ra $|A'| = |U| - (|\overline{A_1'}| + |\overline{A_2'}| + |\overline{A_3'}|) = C^{3-1}_{11+3-1} - (C^{3-1}_{2+3-1} + C^{3-1}_{1+3-1} + C^{3-1}_{1+3-1}) = C^2_{13} - (C^2_4 + C^2_3 + C^2_3) = 66$.

Cách 2: Sử dụng hàm sinh. Ta định nghĩa $G(x) = (x + x^2 + \dots + x^9)(1 + x + \dots + x^9)^2$. Từ định nghĩa của A và $G(x)$, ta có $|A|$ chính là hệ số của x^{12} trong khai triển của $G(x)$. Ta có

$$\begin{aligned}
G(x) &= (x + x^2 + \dots + x^9)(1 + x + \dots + x^9)^2 \\
&= x(1 + x + \dots + x^8)(1 + x + \dots + x^9)^2 \\
&= x \cdot \frac{1 - x^9}{1 - x} \cdot \left(\frac{1 - x^{10}}{1 - x}\right)^2 \\
&= x(1 - x^9)(1 - x^{10})^2(1 - x)^{-3}.
\end{aligned}$$

Ta có $(1 - x)^{-3} = \sum_{r=0}^{\infty} C^r_{-3}(-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r C^r_{-3} x^r$. Do đó, hệ số của x^r $(r \geq 0)$ trong khai triển của $(1 - x)^{-3}$ là $(-1)^r C^r_{-3} = (-1)^r[(-1)^r C^r_{3+r-1}] = C^r_{r+2}$.
Chú ý rằng hệ số của x^{12} trong khai triển của $G(x)$ chính bằng hệ số của x^{11} trong khai triển của $(1 - x^9)(1 - x^{10})^2(1 - x)^{-3} = (1 - x^9 - 2x^{10} + 2x^{19} + x^{20} - x^{29})(1 - x)^{-3}$. Để tạo thành x^{11}, ta có thể nhân tương ứng x^0, x^9 hoặc x^{10} trong $(1 - x^9 - 2x^{10} + 2x^{19} + x^{20} - x^{29})$ với x^{11}, x^2, hoặc x^1 trong khai triển của $(1 - x)^{-3}$. Kết quả cuối cùng là $C^{11}_{13} - C^2_4 - 2C^1_3 = 66$.

Lời giải 5. [**2** điểm]

(a) Sử dụng Định lý bắt tay, ta có $$2\|E\| = \sum_{v \in V} \deg_G(v) = 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 5 = 16.$$ Do đó, số cạnh của G là $\|E\| = 8$.	**0.25**
Nếu G là đồ thị phẳng và liên thông, công thức Euler cho ta $n - m + r = 2$, trong đó $n = \|V\|$, $m = \|E\|$, và r là số miền. Suy ra, $r = m - n + 2 = 8 - 6 + 2 = 4$.	**0.25**
Do G có 4 đỉnh bậc lẻ, G không có đường đi Euler.	**0.25**
Do G có một đỉnh bậc 1, G không có chu trình Hamilton.	**0.25**
(b) Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử tồn tại một đồ thị G gồm n đỉnh trong đó không có hai đỉnh nào có cùng bậc. Do G là đơn đồ thị có $n \geq 2$ đỉnh, bậc của mỗi đỉnh thuộc tập $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Do không có hai đỉnh nào cùng bậc, tồn tại các đỉnh u và v có bậc lần lượt là 0 và $n - 1$. Do v có bậc $n - 1$, v là đỉnh kề với tất cả các đỉnh khác trong G, nghĩa là v cũng phải kề với u. Tuy nhiên, do bậc của u bằng 0, u không kề với bất kỳ đỉnh nào khác trong G. Đây là một mâu thuẫn.	**1**

Hà Nội, ngày 26 tháng 07 năm 2024
NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
(ký và ghi rõ họ tên)

Hoàng Anh Đức