Một số chú ý

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học
Khoa Toán-Cơ-Tin học
Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

- Với các mã đề có câu "Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$." thì đổi thành "Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$."
- Với các mã đề có câu tính giá trị của biểu thức $\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$, có hai đáp án giống nhau là $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$. Nếu đáp án này đúng thì chọn cả hai đáp án giống nhau trong phiếu trả lời trắc nghiệm.
- Với các mã đề có câu tính giá trị biểu thức $\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$ thì không có đáp án nào trong số các đáp án đưa ra là đúng. (Bỏ qua đáp án sai trong đề.)
- Với các mã đề có câu tính giá trị biểu thức $\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$ thì kết quả là 102 nếu quy ước là $\prod_{k=n}^{2} k = 1$ với mọi $n > 2$ (hoặc tổng quát hơn là $\prod_{k=n}^{m} k = 1$ với mọi $n > m$). (Quy ước này không được đề cập trong bài giảng. Do đó, có thể coi như là không có đáp án nào là đúng trong số các đáp án đưa ra trong đề trên.)
- Lỗi trong quá trình sinh ngẫu nhiên đề thi dẫn đến có các mã đề giống nhau nhưng nội dung khác nhau.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **276**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 02. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \leftrightarrow y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \vee y$ (D) $x \wedge y$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(B) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

> $$\begin{aligned} & 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\ \Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\ \Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\ \Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4) \end{aligned}$$
>
> Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$$p = \text{“Tôi đi bơi.”}$$
$$q = \text{“Trời mưa.”}$$

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Tôi không đi bơi khi trời mưa.”

(A) $\neg p \to q$ (B) $\neg q \to p$ (C) $p \to q$ (D) $q \to \neg p$

Câu 06. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x \, \forall y \, \exists z \, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x \, \exists y \, \forall z \, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(B) $\forall x \, \exists y \, \forall z \, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x \, \exists y \, \forall z \, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(D) $\exists x \, \forall y \, \exists z \, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 07. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ “c là một chữ số thập phân”, $\text{isLower}(c) =$ “c là chữ cái thường”, và $\text{isUpper}(c) =$ “c là chữ cái viết hoa”, trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\} \, \text{isUpper}(x_j)$
(B) $\exists i \in \{1, \dots, n\} \, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1, \dots, n\} \, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$

Câu 08. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?
(A) $x \oplus y \oplus z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (D) $x \wedge y \wedge z$

Câu 09. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

“Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19.”

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 10. Gọi $P(x,y)$ là vị từ “x chơi pickleball với y”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \forall z \, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z \, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z \, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z \, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$

Câu 11. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$ (B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$ (D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 13. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Z}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Q}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 14. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

Câu 15. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

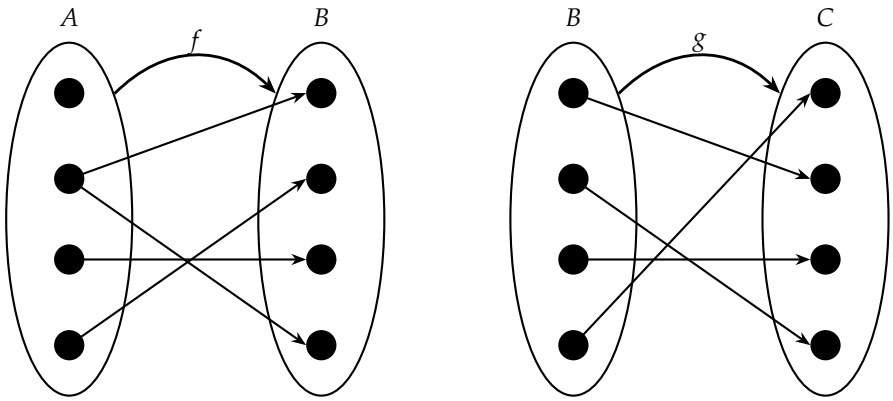
(A) 103 (B) 102 (C) 100 (D) 101

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (C) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh (B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh (D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) -1
(D) 1

Câu 19. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 20. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.
(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?
(A) 14 (B) 22 (C) 26 (D) 18

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(C) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?
(A) -5 (B) -2 (C) 1 (D) -4

Câu 25. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 26. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

Câu 27. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 28. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a+b \geq c+d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1+n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1+0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1+k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1+(k+1))-1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (8)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n>1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) 0 (B) -2 (C) Không thể tính được (D) -1

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n>2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 32. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(m)$ (B) $O(n)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(m \cdot n)$

Câu 33. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2 \log n)$ (D) $O(n^2)$

Câu 34. Hàm nào sau đây là $\Theta(n\log n)$?
(A) $5n + 17\log n$
(B) $6n\log n + n^{1.1} + 2$
(C) $23n\log\log n + 3n\log n$
(D) $2^n \log n + n$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) $f(n) = O(n\log n)$
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(10n/11)$
(D) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

Câu 36. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(\log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n\log n)$

Câu 37. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (9)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (10)\\ &= O(1). && && (11) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 38. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?
(A) x^4 (B) $y \cdot x^4$ (C) $x \cdot y^4$ (D) y^4

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?
(A) $O(n^{d+1})$ (B) $O(n^d \log n)$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) $f(n) = O(n^2)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **276**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** B	**19.** B	**25.** C	**31.** C	**36.** A
02. A	**08.** B	**14.** B	**20.** B	**26.** B	**32.** D	**37.** D
03. B	**09.** D	**15.** B	**21.** D	**27.** A	**33.** D	**38.** B
04. B	**10.** B	**16.** A	**22.** C	**28.** A	**34.** C	**39.** B
05. D	**11.** D	**17.** C	**23.** C	**29.** C	**35.** D	**40.** B
06. C	**12.** C	**18.** C	**24.** D	**30.** A		

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **588**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$ (B) $\neg q \to p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $p \to q$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$ (B) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$

Câu 03. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Chứng minh trên là đúng
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 06. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \leftrightarrow y$
(B) $x \wedge y$
(C) $x \oplus y$
(D) $x \vee y$

Câu 08. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 09. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 10. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 11. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 1
(D) -1

Câu 12. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

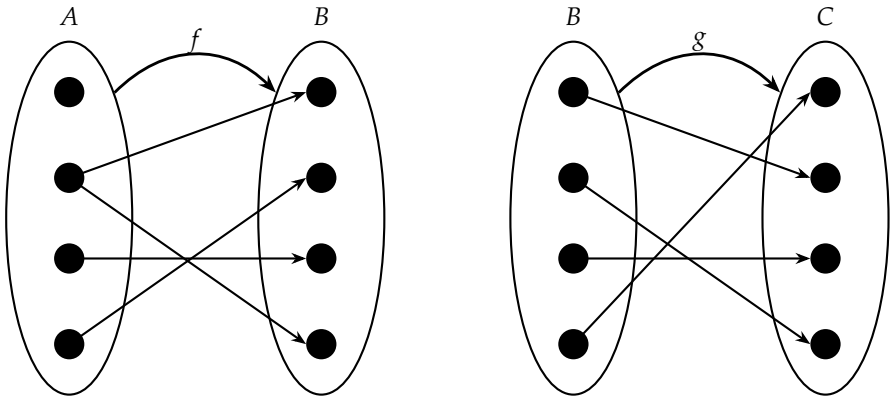
(A) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(B) $a_n = n + 3$
(C) $a_n = 3n$
(D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \in \emptyset$

Câu 18. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$
(B) Cả ba phát biểu khác đều sai
(C) A là tập hữu hạn
(D) $A \subset A$

Câu 19. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 4

Câu 20. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 80 (B) 75 (C) 78 (D) 73

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng

Câu 24. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k + 3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(C) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k + 1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (4)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (5)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1386011925 (B) 1383960600 (C) 13839606000 (D) 1383960500

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 29. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(C) $P(12), P(13), P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (9)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (7) và (8) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (7) và (8) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 32. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x \cdot y)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x)$

Câu 33. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2 \log n)$ (D) $O(n^2)$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.32})$
(B) $f(n) = O(n)$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n^5)$

Câu 35. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(\log n)$ (D) $O(1)$

Câu 36. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (10)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (11)\\ &= O(1). && && (12) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i(n/b^i)^d$ (B) $ca^i n^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **588**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** A	**13.** A	**18.** B	**24.** C	**30.** B	**36.** B
02. C	**08.** B	**14.** D	**19.** B	**25.** A	**31.** B	**37.** A
03. A	**09.** D	**15.** A	**20.** D	**26.** A	**32.** C	**38.** A
04. B	**10.** B	**16.** A	**21.** D	**27.** D	**33.** D	**39.** B
05. D	**11.** D	**17.** D	**22.** A	**28.** A	**34.** C	**40.** A
06. C	**12.** C		**23.** B	**29.** B	**35.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **795**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow 2 &= 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow 1+2 &= 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow 3 &= 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 03. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 04. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 05. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg p \to q$ (B) $\neg q \to p$ (C) $p \to q$ (D) $q \to \neg p$

Câu 06. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(C) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(D) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$ (B) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(C) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x \forall y \exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x \exists y \forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$ (B) $\forall x \exists y \forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(C) $\exists x \forall y \exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$ (D) $\forall x \exists y \forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$

Câu 09. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{Z}$ (B) $A = B = \mathbb{N}$ (C) $A = B = \mathbb{Q}$ (D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 12. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 80 (B) 75 (C) 73 (D) 78

Câu 13. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$ (B) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$ (D) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$

Câu 14. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n+1)\cdot 2^n - 2$ (B) $(n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$ (C) $(n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $n\cdot 2^{n+1} - 2$

Câu 16. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 1
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 0
(D) -1

Câu 17. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\dfrac{55}{11}$ (B) 5 (C) $\dfrac{10}{11}$ (D) 10

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 22 (B) 14 (C) 18 (D) 26

Câu 22. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(C) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$

(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 26. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

(D) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

Câu 27. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

(B) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

(D) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) 1 (C) -2 (D) -5

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 31. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa $\mathsf{mileposts} := A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm $\mathsf{post} :=$ RootSearch$(\mathsf{mileposts}, x)$.
- Trả về RootSearch$(A[(\mathsf{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \mathsf{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x)$.

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 32. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 33. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2 \log n)$ (D) $O(n^2)$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/b^i)^d$ (B) $ca^i n^d$ (C) $ca^i(n/b^i)^d$ (D) $c(n/a^i)^d$

Câu 35. Hàm SuperPower sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SuperPower(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SuperPower(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SuperPower(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4 (B) y^4 (C) $x \cdot y^4$ (D) $y \cdot x^4$

Câu 36. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
  i := i/2
  a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 37. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(1)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 40. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $2^n \log n + n$
(B) $23n \log \log n + 3n \log n$
(C) $5n + 17 \log n$
(D) $6n \log n + n^{1.1} + 2$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **795**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**13.** B	**19.** C	**25.** C	**31.** D	**37.** D
02. D	**08.** D	**14.** D	**20.** B	**26.** B	**32.** C	**38.** B
03. B	**09.** B	**15.** B	**21.** D	**27.** D	**33.** C	
04. B	**10.** C	**16.** D	**22.** B	**28.** A	**34.** C	**39.** C
05. D	**11.** D	**17.** A	**23.** C	**29.** B	**35.** D	
06. A	**12.** C	**18.** C	**24.** A	**30.** C	**36.** A	**40.** B

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **769**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 02. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 03. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(D) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$

Câu 05. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn
(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử x, y, và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \vee y \vee z$ (B) $x \oplus y \oplus z$ (C) $x \wedge y \wedge z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 07. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 08. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(B) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$

Câu 09. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 10. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $P(0, 3)$ (B) $\forall y \exists x\, P(x, y)$ (C) $\forall x \forall y\, P(x, y)$ (D) $\exists y\, P(4, y)$

Câu 11. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2x$ (B) $f(x) = 2^x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 13. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 14. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 100 (B) 101 (C) 103 (D) 102

Câu 15. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) 2

Câu 16. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (B) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (C) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (D) $n \cdot 2^{n+1} - 2$

Câu 18. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 75 (B) 80 (C) 73 (D) 78

Câu 19. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$

Câu 20. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\frac{10}{11}$ (C) $\frac{55}{11}$ (D) 5

Câu 21. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 22. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 23. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 24. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (11)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương

Câu 25. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 26. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (12)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (13)$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (12) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 32. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

Ⓐ $y \cdot x^4$ Ⓑ $x \cdot y^4$ Ⓒ y^4 Ⓓ x^4

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

Ⓐ $f(n) = O(10n/11)$
Ⓑ Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
Ⓒ $f(n) = O(n \log n)$
Ⓓ $f(n) = O(n)$

Câu 34. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

Ⓐ 2^{n+1} là $O(2^n)$ Ⓑ 2^{2n} là $O(2^n)$
Ⓒ $\log n + 1$ là $O(\log n)$ Ⓓ $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 35. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

Ⓐ $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$ Ⓑ $T(n) = T(n/2) + O(1)$
Ⓒ $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ Ⓓ $T(n) = T(n/2) + O(n)$

Câu 36. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ−1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ (D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\omega(g(x))$

Câu 38. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 39. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(1)$ (B) $O(n\log n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 40. Hàm LogicalValue sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?
(A) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (B) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$ (D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **769**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** D	**19.** C	**25.** C	**31.** A	**37.** B
02. D	**08.** B	**14.** D	**20.** B	**26.** B	**32.** A	**38.** D
03. A	**09.** B	**15.** C	**21.** A	**27.** B	**33.** B	
04. B	**10.** D	**16.** B	**22.** B	**28.** D	**34.** B	**39.** D
05. A	**11.** C	**17.** B	**23.** D	**29.** C	**35.** C	
06. A	**12.** C	**18.** C	**24.** D	**30.** B	**36.** C	**40.** C

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **822**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(B) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$
(C) $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(D) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 02. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(B) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(D) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 03. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Chứng minh trên là sai
(B) Chứng minh trên là đúng
(C) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 04. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 05. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x \forall y \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x \exists y \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(B) $\exists x \forall y \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x \exists y \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(D) $\forall x \exists y \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 07. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 08. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ (B) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ (D) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 09. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1+2 = 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \vee y$

Câu 11. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

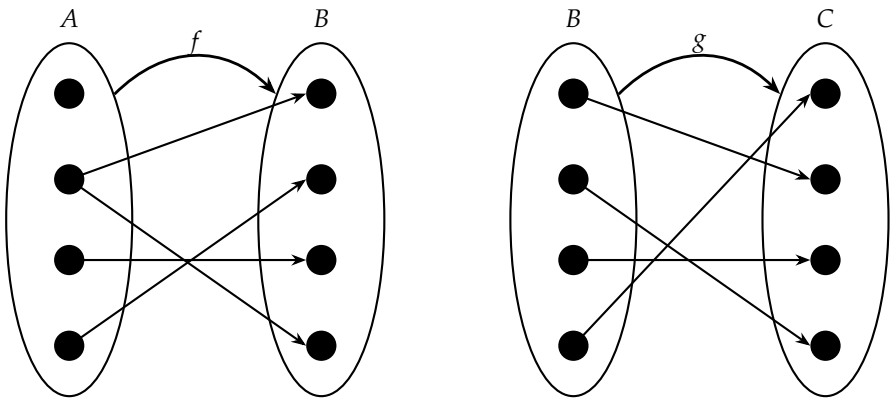
(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 12. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(C) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân

Câu 13. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Câu 14. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?
(A) 1
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 0
(D) -1

Câu 17. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{Q}$ (C) $A = B = \mathbb{N}$ (D) $A = B = \mathbb{Z}$

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Câu 19. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) -5 (C) -4 (D) 1

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 26 (B) 18 (C) 14 (D) 22

Câu 25. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k - 3)$ đúng thì $P(k + 1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 27. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 30. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 31. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay $\diamondsuit$ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4
(B) $y \cdot x^4$
(C) y^4
(D) $x \cdot y^4$

Câu 32. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.

- Đệ quy, tìm post := ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 33. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
  for x in D do
      for y in D do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (B) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$ (D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$
(B) $f(n) = O(n \log n)$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(10n/11)$

Câu 35. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$

Câu 36. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m+n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(m \cdot n)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i(n/b^i)^d$ (B) $ca^i n^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 38. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(B) $23n \log\log n + 3n \log n$
(C) $2^n \log n + n$
(D) $5n + 17 \log n$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^{d+1})$ (B) $O(n^d \log n)$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 40. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
    if n > 1
        m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **822**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** A	**13.** A	**19.** C	**25.** B	**31.** B	**37.** A
02. C	**08.** D	**14.** C	**20.** B	**26.** D	**32.** B	**38.** B
03. A	**09.** A	**15.** A	**21.** D	**27.** A	**33.** D	**39.** B
04. A	**10.** C	**16.** D	**22.** A	**28.** B	**34.** C	**40.** A
05. A	**11.** D	**17.** A	**23.** C	**29.** A	**35.** A	
06. B	**12.** D	**18.** C	**24.** A	**30.** A	**36.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **393**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 02. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Chứng minh trên là sai

Câu 03. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

> $1 = 2$ (Điều phải chứng minh) (1)
> $\Leftrightarrow 2 = 1$ (Đối xứng) (2)
> $\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$ (Cộng theo vế (1) và (2)) (3)
> $\Leftrightarrow 3 = 3.$ (4)
>
> Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

$$\text{“Nếu } x \text{ và } y \text{ là các số thực thì } |x+y| \leq |x| + |y|\text{.”}$$

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?
(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Gọi $P(x,y)$ là vị từ “x chơi pickleball với y”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$

Câu 08. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ “x là bạn của y”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn”.
(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 09. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$$p = \text{“Tôi đi bơi.”}$$
$$q = \text{“Trời mưa.”}$$

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$ (B) $\neg p \to q$ (C) $\neg q \to p$ (D) $p \to q$

Câu 11. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 75 (B) 80 (C) 78 (D) 73

Câu 12. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 13. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Câu 14. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 15. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?
(A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 1
(C) -1
(D) 0

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{55}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{10}{11}$ (D) 5

Câu 17. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$

Câu 18. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset \in \emptyset$ (B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 19. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3n$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (7)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (8)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(D) $P(12)$

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5
(B) -2
(C) 1
(D) -4

Câu 25. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (11)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (12)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (10) và (11) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (10) và (11) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 26. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 27. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 29. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 13839606000 (D) 1386011925

Câu 31. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 32. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?
(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $ca^i n^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 34. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log 3})$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 35. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^3)$

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(n^3)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n)$

Câu 37. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?
(A) $y \cdot x^4$ (B) x^4 (C) $x \cdot y^4$ (D) y^4

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 39. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n\log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n^d \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **393**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**12.** A	**18.** A	**24.** D	**30.** D	**36.** D
02. D	**08.** A	**13.** A	**19.** C	**25.** B	**31.** D	**37.** A
03. A	**09.** B	**14.** D	**20.** C	**26.** A	**32.** B	**38.** A
04. B	**10.** A	**15.** C	**21.** B	**27.** A	**33.** B	**39.** C
05. B	**11.** D	**16.** C	**22.** D	**28.** A	**34.** A	**40.** D
06. D		**17.** D	**23.** C	**29.** A	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **072**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y=xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0,3)$ (B) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (C) $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$ (D) $\exists y\,P(4,y)$

Câu 02. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(x=z))$
(B) $\exists x\exists y\forall z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y\neq z))$
(C) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y=z))$
(D) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y\neq z))$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x\wedge y$ (B) $x\vee y$ (C) $x\oplus y$ (D) $x\leftrightarrow y$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n\in\mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$
(B) $n+3=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$
(C) $n+4=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$
(D) $n+3=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1\to 2, 1\to 3, 2\to 4, 3\to 4, 4\to 1$
(B) $1\to 3, 2\to 1, 3\to 2, 4\to 1, 4\to 2, 4\to 3$
(C) $1\to 2, 3\to 1, 3\to 2, 4\to 2, 3\to 4, 4\to 3$
(D) $1\to 2, 2\to 1, 3\to 4, 4\to 3$

Câu 06. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x=x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(C) $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(D) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?
(A) $x \oplus y \oplus z$
(B) $x \wedge y \wedge z$
(C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(B) $a_n = 3^n + 2^n$
(C) $a_n = 3n$
(D) $a_n = n + 3$

Câu 12. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

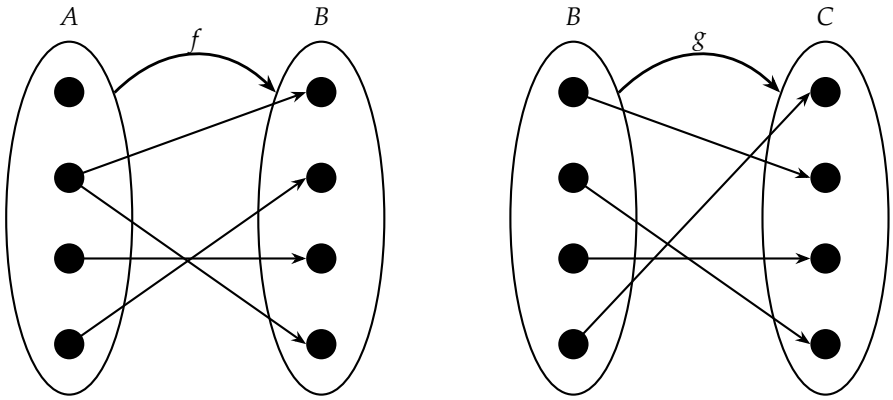
Câu 13. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 14. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$



Hình 1: Các quan hệ f và g.

(A) 10 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 16. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 17. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 19. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 78 (B) 73 (C) 75 (D) 80

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

Câu 24. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n+3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 25. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$

(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

(C) $P(12)$

(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) 0 (C) -1 (D) -2

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 13839606000 (C) 1386011925 (D) 1383960600

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.
(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 32. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x \cdot y)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n \log n)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 34. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m+n)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(n)$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (4)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (5)\\ &= O(1). && && (6) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), 𝒟):
  for x in 𝒟 do
      for y in 𝒟 do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$ (B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **072**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** C	**13.** D	**18.** C	**24.** C	**30.** A	**36.** D
02. D	**08.** D	**14.** A	**19.** B	**25.** B	**31.** C	**37.** D
03. D	**09.** C	**15.** D	**20.** B	**26.** A	**32.** C	**38.** A
04. B	**10.** D	**16.** A	**21.** A	**27.** C	**33.** B	**39.** C
05. A	**11.** A	**17.** C	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**40.** A
06. C	**12.** A		**23.** B	**29.** A	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **481**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 02. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 03. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\ (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\ \text{isUpper}(x_j)$

Câu 04. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$$p = \text{“Tôi đi bơi.”}$$
$$q = \text{“Trời mưa.”}$$

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Tôi không đi bơi khi trời mưa.”

(A) $\neg p \to q$ (B) $\neg q \to p$ (C) $p \to q$ (D) $q \to \neg p$

Câu 06. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(D) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?
(A) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(B) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(D) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ “x là bạn của y”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn”.
(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 12. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{N}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{R}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 13. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$

Câu 14. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh (B) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh (D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 15. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \in \emptyset$

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{55}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{10}{11}$ (D) 5

Câu 17. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 18. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) -1
(D) 1

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ (D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) 1 (C) -2 (D) -5

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?
(A) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 25. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 26. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (10)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (11)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 29. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 32. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 33. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $2^n \log n + n$
(B) $23n \log\log n + 3n \log n$
(C) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(D) $5n + 17 \log n$

Câu 34. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 35. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(D) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, \frac{n^2}{1000000}, n \log n, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
   i := i + 1
if x^2 = a_i then
   return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(n^3)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n)$

Câu 37. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
   for j := 2 to m do
      a := a + 1
      b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m + n)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?
(A) $ca^i(n/b^i)^d$ (B) $ca^i n^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $c(n/a^i)^d$

Câu 40. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH($A[(\text{post} - 1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
   if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
         ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
         for i := 1 to n do
               if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
                     return i
   ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
   k := ⌊√n⌋
   mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
   for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
         mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
   ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
   post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
   ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
   return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **481**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** C	**13.** D	**19.** D	**24.** D	**30.** B	**36.** D
02. D	**08.** A	**14.** C	**20.** C	**25.** B	**31.** A	**37.** B
03. A	**09.** C	**15.** D	**21.** A	**26.** A	**32.** C	**38.** A
04. C	**10.** A	**16.** C	**22.** A	**27.** B	**33.** B	**39.** A
05. D	**11.** D	**17.** A	**23.** D	**28.** D	**34.** B	**40.** A
06. C	**12.** C	**18.** C		**29.** A	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **090**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

Câu 02. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 03. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$ (B) $\exists y\, P(4,y)$ (C) $P(0,3)$ (D) $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$

Câu 04. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \vee y \vee z$ (B) $x \wedge y \wedge z$ (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 05. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(D) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

Câu 06. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\, ((x \neq 0) \rightarrow \exists y\, (xy = 1))$
(B) $\exists x\, ((x \neq 0) \rightarrow \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\forall x\, ((x \neq 0) \rightarrow \forall y\, (xy = 1))$
(D) $\exists x\, ((x \neq 0) \rightarrow \forall y\, (xy = 1))$

Câu 07. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 08. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói thật
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \wedge y$
(B) $x \oplus y$
(C) $x \vee y$
(D) $x \leftrightarrow y$

Câu 10. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}\}$$

(A) 2
(B) 4
(C) 3
(D) 1

Câu 12. Cho các tập hợp $A = \{a,b,c,d\}$ và $B = \{1,2,3,4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3),(b,4),(c,2),(d,2)\}$
(B) $f = \{(a,3),(b,4),(c,2),(d,1)\}$
(C) $f = \{(a,3),(b,4),(c,3),(d,4)\}$
(D) $f = \{(a,3),(b,3),(c,3),(d,3)\}$

Câu 13. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9,9,9,9,9,\ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

Ⓐ $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ Ⓑ $n\cdot 2^{n+1}-2$ Ⓒ $(n+1)\cdot 2^{n}-2$ Ⓓ $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

Câu 15. Cho các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ và $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x)=\lfloor x/2\rfloor$ và $g(x)=\lceil(5-2x)/3\rceil$. Giá trị của $(f\circ g)(5)$ là?

Ⓐ Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
Ⓑ 1
Ⓒ -1
Ⓓ 0

Câu 16. Biểu thức nào là sai?

Ⓐ $\emptyset\subseteq\{\emptyset\}$ Ⓑ $\emptyset\in\{\emptyset\}$ Ⓒ $\emptyset\in\emptyset$ Ⓓ $\emptyset\subseteq\emptyset$

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n\geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

Ⓐ $a_n=n+3$ Ⓑ $a_n=3n$ Ⓒ $a_n=3^n+2^n$ Ⓓ $a_n=3\cdot 2^{n-1}$

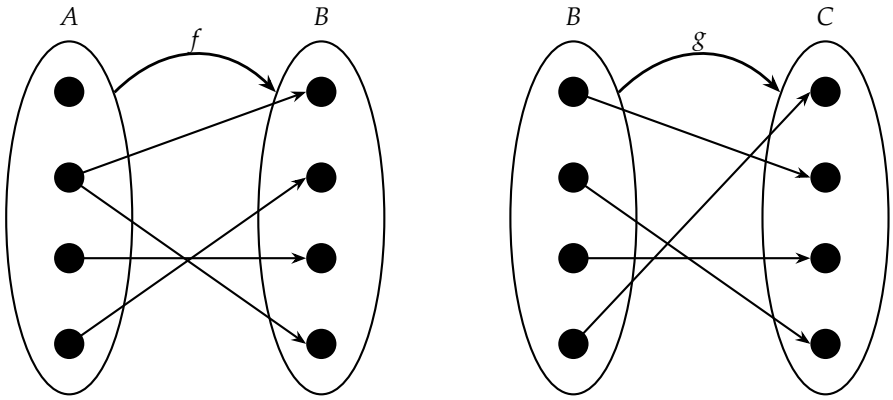
Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n\geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

Ⓐ $a_n=2^n$ Ⓑ $a_n=\dfrac{n}{n+1}$ Ⓒ $a_n=2n+3$ Ⓓ $a_n=n^2$

Câu 19. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1=3$ và công sai $d=5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

Ⓐ 78 Ⓑ 73 Ⓒ 75 Ⓓ 80

Câu 20. Cho các quan hệ $f\subseteq A\times B$ và $g\subseteq B\times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

Ⓐ $g\circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
Ⓑ $g\circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
Ⓒ $g\circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
Ⓓ $g\circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 21. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n\geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k\geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

Ⓐ $P(12), P(13), P(14), P(15)$
Ⓑ $P(12)$
Ⓒ $P(15)$
Ⓓ $P(12), P(13), P(14)$

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2}+\dfrac{1}{a_{n-1}} & (n>1)\\ a_0=-2, a_1=1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

Ⓐ 0 Ⓑ -2 Ⓒ Không thể tính được Ⓓ -1

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (4)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (2) và (3) là tương đương
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 25. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?

(A) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$

Câu 26. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) $f(n) = O(n \log n)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(10n/11)$

Câu 32. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?
(A) $23n \log \log n + 3n \log n$
(B) $2^n \log n + n$
(C) $5n + 17 \log n$
(D) $6n \log n + n^{1.1} + 2$

Câu 33. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?
(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?
(A) $O(n^d)$
(B) $O(n^d \log n)$
(C) $O(n^{d+1})$
(D) $O(n \log n)$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (7)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= O(1). && && (9) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^2)$ (B) $f(n) = O(n)$ (C) $f(n) = O(n^{2.58})$ (D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 37. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (D) $T(n) = T(n/2) + O(1)$

Câu 38. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FibMergeSort(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ−1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FibMergeSort(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FibMergeSort(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      Merge(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
Merge(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$

Câu 39. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(y)$ (B) $O(x)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x \cdot y)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?
(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **090**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**12.** B	**18.** C	**24.** D	**30.** A	**36.** C
02. B	**08.** A	**13.** C	**19.** B	**25.** C	**31.** B	**37.** C
03. B	**09.** D	**14.** D	**20.** A	**26.** D	**32.** A	**38.** B
04. A	**10.** B	**15.** C	**21.** A	**27.** B	**33.** A	**39.** C
05. A	**11.** D	**16.** C	**22.** C	**28.** B	**34.** B	**40.** B
06. A		**17.** D	**23.** C	**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **228**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \land P(x, z) \land (x = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x, y) \land P(x, z) \land (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \land P(x, z) \land (y = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \land P(x, z) \land (y \neq z))$

Câu 03. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \land \neg\text{isLower}(x_i) \land \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \lor \text{isLower}(x_i) \lor \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \land \text{isLower}(x_i) \land \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \lor \text{isLower}(x_i)) \land \exists j \in \{1, \dots, n\}\, \text{isUpper}(x_j)$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 06. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \leftrightarrow y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \oplus y$ (D) $x \vee y$

Câu 08. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 09. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(B) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

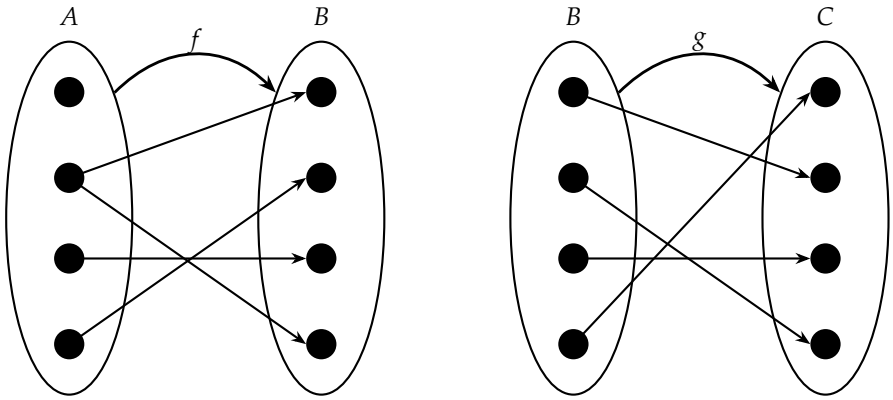
$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 3 (D) 1

Câu 12. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Câu 13. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 5 (B) $\frac{10}{11}$ (C) 10 (D) $\frac{55}{11}$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (B) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $n \cdot 2^{n+1} - 2$

Câu 16. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 1
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 0
(D) -1

Câu 17. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$

Câu 18. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$
(B) Cả ba phát biểu khác đều sai
(C) A là tập hữu hạn
(D) $A \subset A$

Câu 19. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$

Câu 20. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3^n + 2^n$ (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = n + 3$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) -1 (C) 0 (D) -2

Câu 25. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 26. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$ (B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3, a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3, a_1 = 7$

Câu 27. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4 (B) $y \cdot x^4$ (C) y^4 (D) $x \cdot y^4$

Câu 32. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
   i := i + 1
if x^2 = a_i then
   return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n)$

Câu 33. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 34. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m+n)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(n)$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

Câu 36. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i-1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **228**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** A	**13.** D	**19.** C	**25.** B	**31.** B	**37.** A
02. D	**08.** B	**14.** B	**20.** B	**26.** B	**32.** D	**38.** A
03. A	**09.** C	**15.** B	**21.** C	**27.** D	**33.** D	
04. C	**10.** A	**16.** D	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**39.** A
05. A	**11.** C	**17.** A	**23.** B	**29.** C	**35.** D	
06. C	**12.** A	**18.** B	**24.** A	**30.** B	**36.** A	**40.** B

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **087**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(B) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$
(C) $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(D) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 02. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \wedge y$ (B) $x \vee y$ (C) $x \oplus y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\, (\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai

Câu 06. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$
(B) $x \vee y \vee z$
(C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(D) $x \wedge y \wedge z$

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(B) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(D) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 10. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{10}{11}$
(B) 10
(C) $\frac{55}{11}$
(D) 5

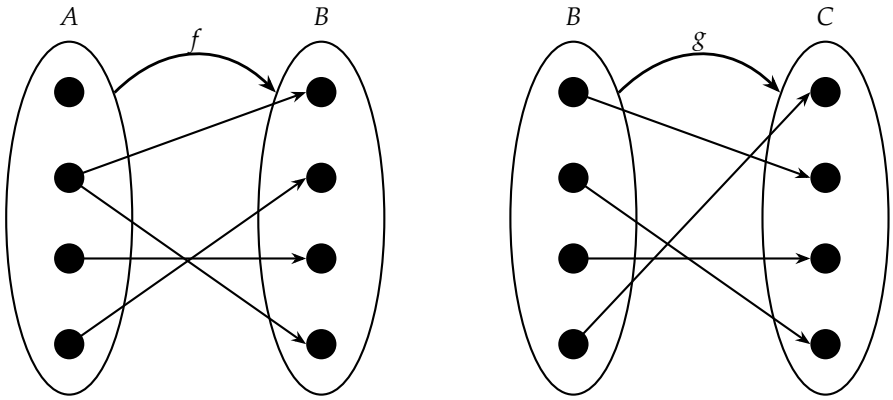
Câu 12. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4
(B) 2
(C) 1
(D) 3

Câu 13. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Câu 14. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 15. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $A \subset A$
(C) A là tập hữu hạn
(D) $B \subseteq A$

Câu 16. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 75 (B) 80 (C) 73 (D) 78

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 22. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -1
(B) Không thể tính được
(C) -2
(D) 0

Câu 24. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (3) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (4) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (3) không chính xác
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác

Câu 26. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

Câu 27. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(B) $P(15)$
(C) $P(12), P(13), P(14)$
(D) $P(12)$

Câu 28. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (11)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 32. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) $y \cdot x^4$ (B) $x \cdot y^4$ (C) y^4 (D) x^4

Câu 33. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = T(n/2) + O(1)$

Câu 34. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
  for x in D do
      for y in D do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$ (B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\exists x \in \mathcal{D} \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$ (D) $\forall x \in \mathcal{D} \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (12)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (13)\\ &= O(1). && && (14) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log 3})$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ−1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) 2^{2n} là $O(2^n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **087**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**06.** D	**12.** C	**18.** C	**24.** B	**30.** B	**36.** B
02. B	**07.** C	**13.** C	**19.** B	**25.** C	**31.** C	**37.** A
03. D	**08.** B	**14.** C	**20.** C	**26.** B	**32.** A	**38.** A
04. B	**09.** C	**15.** A	**21.** B	**27.** A	**33.** A	**39.** A
05. A	**10.** B	**16.** C	**22.** B	**28.** A	**34.** A	**40.** D
	11. A	**17.** C	**23.** B	**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **922**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$

Câu 02. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 03. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg p \to q$ (B) $p \to q$ (C) $q \to \neg p$ (D) $\neg q \to p$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 07. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$ (B) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$ (C) $P(0, 3)$ (D) $\exists y\, P(4, y)$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$
(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$
(C) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \oplus Q(x, z))$

Câu 09. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?
(A) $x \oplus y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \vee y$

Câu 11. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2x$ (B) $f(x) = 2^x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 12. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?
(A) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$

Câu 13. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \emptyset$ (B) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Câu 14. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

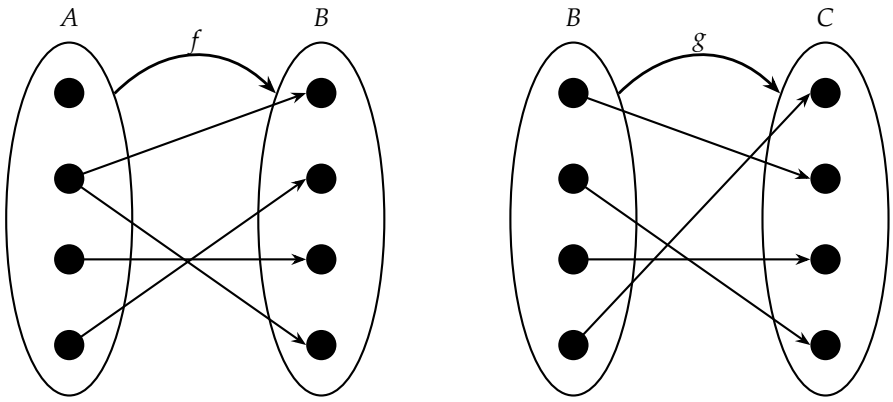
(A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{N}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 15. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 103 (B) 102 (C) 100 (D) 101

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 2

Câu 18. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) -1
(D) 1

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{55}{11}$ (B) 5 (C) $\frac{10}{11}$ (D) 10

Câu 20. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 21. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?
(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (8)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 26 (B) 18 (C) 14 (D) 22

Câu 25. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1386011925 (B) 1383960600 (C) 13839606000 (D) 1383960500

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ và $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m+1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j+1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else
          B[k] := A[j]; j := j+1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 32. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m+1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j+1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else
          B[k] := A[j]; j := j+1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

Câu 33. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n)$

Câu 34. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 35. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$ (B) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (D) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 38. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SuperPower(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SuperPower(x, n − 1)
    return ◇
```

Cần thay $\diamondsuit$ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4 (B) $y \cdot x^4$ (C) $x \cdot y^4$ (D) y^4

Câu 39. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 40. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **922**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** D	**13.** A	**19.** C	**25.** B	**31.** B	**37.** A
02. D	**08.** D	**14.** A	**20.** D	**26.** A	**32.** B	**38.** B
03. C	**09.** A	**15.** B	**21.** B	**27.** D	**33.** A	
04. C	**10.** C	**16.** B	**22.** B	**28.** A	**34.** B	**39.** B
05. B	**11.** C	**17.** A	**23.** C	**29.** C	**35.** B	
06. C	**12.** A	**18.** C	**24.** A	**30.** A	**36.** D	**40.** C

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **512**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \leftrightarrow y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \vee y$ (D) $x \wedge y$

Câu 03. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg p \to q$ (B) $p \to q$ (C) $q \to \neg p$ (D) $\neg q \to p$

Câu 04. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 06. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 09. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\, \text{isUpper}(x_j)$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$

Câu 11. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

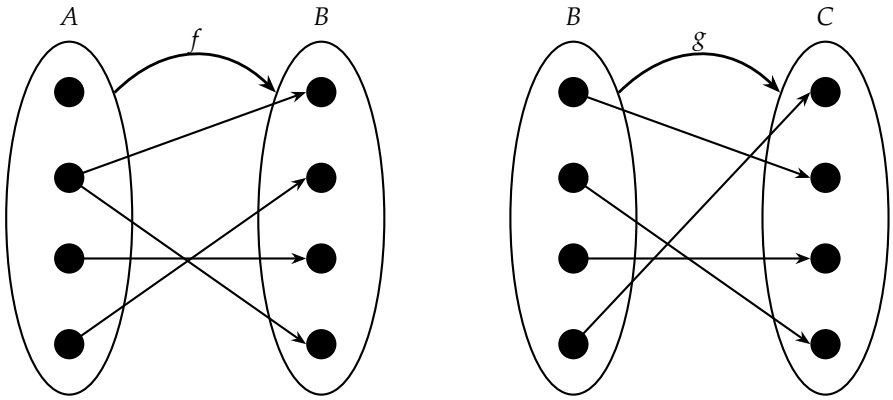
(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 12. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 0
(C) -1
(D) 1

Câu 13. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Câu 14. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 15. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 80 (B) 78 (C) 73 (D) 75

Câu 16. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \in \emptyset$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 17. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Câu 19. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (B) $f(x) = 4/x$ (C) $f(x) = 2x$ (D) $f(x) = 2^x$

Câu 20. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = n^2$ (D) $a_n = 2n + 3$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 22. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(C) $P(12), P(13), P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 23. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(C) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) Không thể tính được
(B) -1
(C) 0
(D) -2

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?
(A) -2
(B) -4
(C) 1
(D) -5

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (4)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (5) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 31. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(10n/11)$
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i-1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 34. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $5n + 17 \log n$ (B) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(C) $23n \log\log n + 3n \log n$ (D) $2^n \log n + n$

Câu 35. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n)$

Câu 37. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
    if n > 1
        m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (D) $T(n) = T(n/2) + O(1)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 39. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (6)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (7)\\ &= O(1). && && (8) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^2)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **512**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** C	**13.** C	**19.** A	**25.** B	**31.** D	**37.** C
02. A	**08.** D	**14.** C	**20.** D	**26.** D	**32.** A	**38.** B
03. C	**09.** A	**15.** C	**21.** B	**27.** D	**33.** A	**39.** C
04. A	**10.** B	**16.** C	**22.** B	**28.** C	**34.** C	
05. A	**11.** D	**17.** C	**23.** C	**29.** C	**35.** B	
06. D	**12.** C	**18.** D	**24.** A	**30.** B	**36.** D	**40.** B

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **887**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 03. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 04. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(B) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$
(D) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\dots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(D) $\exists i \in \{1,\dots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$

Câu 09. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$

Câu 10. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 11. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100}\prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 101 (B) 103 (C) 102 (D) 100

Câu 12. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $B \subseteq A$
(C) A là tập hữu hạn
(D) $A \subset A$

Câu 13. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$

Câu 14. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{N}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 15. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = n^2$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = 2^n$

Câu 16. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3n$ (B) $a_n = 3^n + 2^n$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (D) $a_n = n + 3$

Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

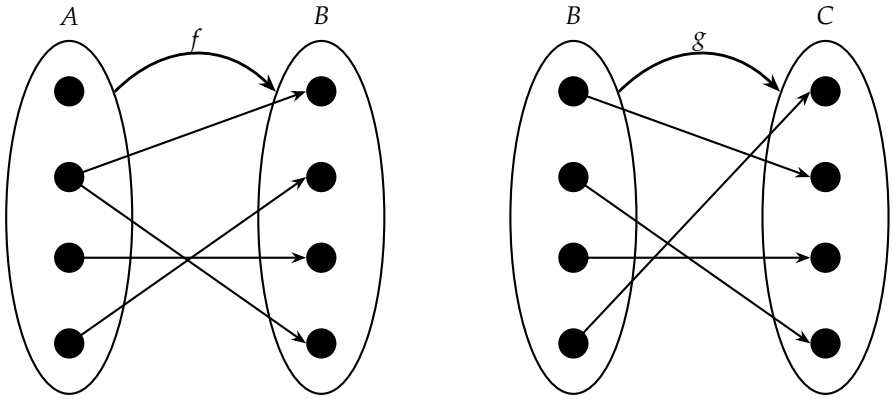
Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2x$ (B) $f(x) = 2^x$ (C) $f(x) = 4/x$ (D) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Câu 19. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 22 (B) 14 (C) 18 (D) 26

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (3)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (4)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (3) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(C) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 24. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) -4 (C) 1 (D) -5

Câu 26. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) -1 (C) Không thể tính được (D) 0

Câu 28. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (11)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 29. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(C) $P(12), P(13), P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 30. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(10n/11)$

Câu 32. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(y)$ (B) $O(x \cdot y)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x)$

Câu 33. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?
(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $O(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?
(A) $c(n/b^i)^d$ (B) $ca^i n^d$ (C) $ca^i(n/b^i)^d$ (D) $c(n/a^i)^d$

Câu 35. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?
(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log 3})$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.
(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 39. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n^d \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **887**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** C	**13.** B	**19.** D	**24.** C	**30.** A	**36.** B
02. C	**08.** D	**14.** A	**20.** D	**25.** B	**31.** B	**37.** D
03. A	**09.** A	**15.** C	**21.** D	**26.** B	**32.** C	**38.** A
04. A	**10.** C	**16.** C	**22.** D	**27.** C	**33.** D	**39.** D
05. B	**11.** C	**17.** C	**23.** C	**28.** A	**34.** C	**40.** D
06. B	**12.** A	**18.** D		**29.** B	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **767**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Alice nói thật và Peter nói dối
(B) Peter nói thật và Alice nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 02. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 03. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x+y=0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?
(A) $x \vee y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \oplus y$

Câu 05. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow 2 &= 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow 1+2 &= 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow 3 &= 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 06. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 07. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(C) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(C) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$

Câu 09. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Chứng minh trên là sai
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 10. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{j}{j+1}\right)$$

(A) $\frac{10}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{55}{11}$ (D) 5

Câu 12. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A-(B\cup C)=(A-C)-B$ (B) $C-(B\cup A)=(C-B)-A$
(C) $A-(B\cup C)=(B-C)-A$ (D) $C-(B\cup A)=(C-A)-B$

Câu 13. Trong số các hàm $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x)=2x$ (B) $f(x)=4/x$ (C) $f(x)=\lfloor x/2\rfloor$ (D) $f(x)=2^x$

Câu 14. Dãy $a_n=3,4,6,9,13,18,24,31,39,\ldots$ $(n\geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n=a_{n-1}+(n-3)$, $a_1=3$ (B) $a_n=a_{n-1}-(n-1)$, $a_1=3$
(C) $a_n=a_{n-1}+(n-1)$, $a_1=3$ (D) $a_n=a_{n-1}-(n-3)$, $a_1=3$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^i$$

(A) $(n+1)\cdot 2^n-2$ (B) $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ (C) $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ (D) $n\cdot 2^{n+1}-2$

Câu 16. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1=3$ và công sai $d=5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 78 (B) 80 (C) 75 (D) 73

Câu 17. Cho các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x<y$ thì $f(x)<f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(D) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset\},\{\emptyset\}\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Câu 19. Cho hàm $f:A\to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b\in B$ và $a\in A$ sao cho $f(a)=b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b\in B$, tồn tại $a\in A$ sao cho $f(a)=b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b\in B$ và $a\in A$ sao cho $f(a)=b$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 20. Cho quan hệ $f\subseteq A\times B$ định nghĩa bởi $f=\{(n,\sqrt{n})\mid n\in A\wedge\sqrt{n}\in B\}$ trong đó A,B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A=B=\mathbb{N}$ (B) $A=B=\mathbb{Z}$ (C) $A=B=\mathbb{Q}$ (D) $A=B=\mathbb{R}$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n=a_{n-2}+\dfrac{1}{a_{n-1}} & (n>1)\\ a_0=-2, a_1=1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 22. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(C) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1386011925 (B) 1383960600 (C) 13839606000 (D) 1383960500

Câu 27. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (11)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (12)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (13)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (11) và (12) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (11) và (12) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n^3)$

Câu 32. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 33. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $O(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\omega(g(x))$

Câu 34. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 35. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^{\log 3})$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^2)$ (B) $f(n) = O(n)$ (C) $f(n) = O(n^{2.58})$ (D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^{d+1})$ (B) $O(n^d \log n)$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 38. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x)$ (B) $O(y)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(1)$

Câu 39. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
    if n > 1
        m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 40. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (14)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (15)\\ &= O(1). && && (16) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **767**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**06.** D	**12.** C	**18.** C	**24.** C	**30.** B	**36.** C
02. D	**07.** B	**13.** C	**19.** B	**25.** A	**31.** A	**37.** B
03. C	**08.** D	**14.** C	**20.** D	**26.** A	**32.** C	**38.** D
04. C	**09.** A	**15.** B	**21.** D	**27.** A	**33.** C	**39.** D
05. A	**10.** C	**16.** D	**22.** B	**28.** B	**34.** D	**40.** C
	11. A	**17.** A	**23.** C	**29.** A	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **640**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 03. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$
(B) $\exists y\, P(4, y)$
(C) $P(0, 3)$
(D) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$
(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \oplus Q(x, z))$
(C) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$ (B) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(C) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 09. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (B) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối (B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Peter nói thật và Alice nói dối (D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$ (B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$ (D) $\emptyset = \{\}$

Câu 12. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(C) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 13. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 14. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{N}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 15. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$ (B) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$ (D) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$

Câu 16. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$

Câu 17. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$

Câu 18. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 75 (B) 80 (C) 73 (D) 78

Câu 19. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3n$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 22. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".
Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1+n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a,b,c,d, ta có $a+b \geq c+d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1+n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1+0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1+k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1+(k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (7)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) -2 (C) 1 (D) -4

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1383960500 (C) 1383960600 (D) 1386011925

Câu 26. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 27. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 32. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
    if n > 1
        m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 34. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $o(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 35. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 36. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (8)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (9)\\ &= O(1). && && (10) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n \log n)$
(C) $f(n) = O(10n/11)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 39. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x \cdot y)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m + n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **640**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** D	**13.** B	**19.** C	**25.** D	**30.** B	**36.** B
02. D	**08.** C	**14.** A	**20.** A	**26.** D	**31.** A	**37.** A
03. B	**09.** A	**15.** C	**21.** B	**27.** A	**32.** A	**38.** B
04. B	**10.** A	**16.** B	**22.** C	**28.** D	**33.** B	**39.** C
05. D	**11.** C	**17.** D	**23.** C	**29.** A	**34.** A	**40.** D
06. B	**12.** C	**18.** C	**24.** D		**35.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **510**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$ (B) $\neg q \to p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $p \to q$

Câu 02. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (B) $x \oplus y \oplus z$ (C) $x \vee y \vee z$ (D) $x \wedge y \wedge z$

Câu 03. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 04. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều

ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \wedge y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \vee y$ (D) $x \oplus y$

Câu 06. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là đúng
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(B) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$

Câu 09. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

> $$\begin{aligned} 1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\ \Leftrightarrow 2 &= 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\ \Leftrightarrow 1 + 2 &= 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\ \Leftrightarrow 3 &= 3. && && (4) \end{aligned}$$
>
> Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 10. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$
(B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$
(C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$
(D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 12. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 4
(B) 2
(C) 1
(D) 3

Câu 13. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 14. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 100
(B) 101
(C) 103
(D) 102

Câu 15. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2^x$
(B) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$
(C) $f(x) = 4/x$
(D) $f(x) = 2x$

Câu 16. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = 2n + 3$
(B) $a_n = n^2$
(C) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$
(D) $a_n = 2^n$

Câu 18. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 19. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\{\}\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 20. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{N}$
(B) $A = B = \mathbb{Z}$
(C) $A = B = \mathbb{Q}$
(D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 21. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 22. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$

- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 23. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này

(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác

(C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) -1 (C) 0 (D) -2

Câu 25. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (11)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 29. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(10n/11)$

Câu 32. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) 2^{2n} là $O(2^n)$

Câu 33. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$
(B) $O(1)$
(C) $O(n \log n)$
(D) $O(n)$

Câu 34. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2)$
(B) $O(n^2 \log n)$
(C) $O(n^3)$
(D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 35. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4
(B) y^4
(C) $x \cdot y^4$
(D) $y \cdot x^4$

Câu 36. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 40. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$ (B) $O(y)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **510**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** C	**13.** D	**19.** A	**24.** A	**30.** B	**36.** A
02. C	**08.** B	**14.** D	**20.** D	**25.** B	**31.** B	**37.** A
03. A	**09.** A	**15.** B	**21.** B	**26.** D	**32.** D	**38.** A
04. D	**10.** B	**16.** C	**22.** C	**27.** D	**33.** A	**39.** C
05. B	**11.** C	**17.** A	**23.** D	**28.** B	**34.** B	**40.** C
06. C	**12.** B	**18.** C		**29.** B	**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **385**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 02. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?
(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 04. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(B) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(C) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 06. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \leftrightarrow y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \oplus y$ (D) $x \vee y$

Câu 08. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0, 3)$ (B) $\exists y\, P(4, y)$ (C) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$ (D) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$

Câu 09. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là sai
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{Z}$ (B) $A = B = \mathbb{N}$ (C) $A = B = \mathbb{Q}$ (D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 12. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $B \subseteq A$
(C) A là tập hữu hạn
(D) $A \subset A$

Câu 13. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 14. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 15. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?
(A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 1
(C) -1
(D) 0

Câu 16. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 102 (B) 103 (C) 101 (D) 100

Câu 17. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 2

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = 3^n + 2^n$ (C) $a_n = n + 3$ (D) $a_n = 3n$

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 20. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = n^2$ (D) $a_n = 2n + 3$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n - 2$ và con ngựa thứ $n + 2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 22. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 23. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 24. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(C) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 25. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) Không thể tính được (B) 0 (C) -1 (D) -2

Câu 27. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.
(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng

Câu 28. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \tag{11}$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 29. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 31. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
  i := i/2
  a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 32. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (12)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (13)\\ &= O(1). && && (14) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

Câu 33. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m+1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j+1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else
          B[k] := A[j]; j := j+1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = T(n/2) + O(1)$

Câu 34. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^d)$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^{d+1})$

Câu 36. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(B) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(D) 2^{2n} là $O(2^n)$

Câu 37. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 38. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **385**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** A	**13.** C	**19.** D	**24.** D	**30.** B	**36.** D
02. B	**08.** B	**14.** A	**20.** D	**25.** C	**31.** D	**37.** B
03. B	**09.** A	**15.** C	**21.** A	**26.** A	**32.** C	**38.** D
04. D	**10.** A	**16.** A	**22.** A	**27.** C	**33.** A	**39.** A
05. C	**11.** D	**17.** D	**23.** D	**28.** A	**34.** A	**40.** B
06. D	**12.** A	**18.** A		**29.** A	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **065**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

Câu 02. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \wedge y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \vee y$ (D) $x \oplus y$

Câu 06. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 07. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 10. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0, 3)$ (B) $\forall y\,\exists x\,P(x, y)$ (C) $\forall x\,\forall y\,P(x, y)$ (D) $\exists y\,P(4, y)$

Câu 11. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = 3^n + 2^n$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = n + 3$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 13. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 75 (B) 73 (C) 78 (D) 80

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 15. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) 2

Câu 16. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 18. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{10}{11}$ (B) 10 (C) 5 (D) $\frac{55}{11}$

Câu 19. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$

Câu 20. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 21. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1386011925 (C) 1383960500 (D) 1383960600

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) -2 (C) 1 (D) -4

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?
(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 29. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 32. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$
(B) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$
(C) $f(x)$ là $o(g(x))$
(D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 33. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{2n} là $O(2^n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 34. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n - 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) y^4
(B) x^4
(C) $y \cdot x^4$
(D) $x \cdot y^4$

Câu 35. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 36. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n\log n)$

Câu 37. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (10)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (11)\\ &= O(1). && && (12) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2\log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **065**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**12.** C	**18.** A	**24.** D	**30.** A	**36.** A
02. B	**08.** C	**13.** B	**19.** C	**25.** C	**31.** B	**37.** D
03. B	**09.** D	**14.** B	**20.** C	**26.** D	**32.** C	**38.** D
04. B	**10.** D	**15.** C	**21.** A	**27.** D	**33.** C	**39.** D
05. B	**11.** A	**16.** C	**22.** D	**28.** B	**34.** C	**40.** D
06. A		**17.** A	**23.** B	**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **324**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y=xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0,3)$ (B) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (C) $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$ (D) $\exists y\,P(4,y)$

Câu 02. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(x=z))$ (B) $\exists x\exists y\forall z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y\neq z))$
(C) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y=z))$ (D) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y\neq z))$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x\wedge y$ (B) $x\vee y$ (C) $x\oplus y$ (D) $x\leftrightarrow y$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n\in\mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$ (B) $n+3=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$
(C) $n+4=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$ (D) $n+3=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1\to 2, 1\to 3, 2\to 4, 3\to 4, 4\to 1$ (B) $1\to 3, 2\to 1, 3\to 2, 4\to 1, 4\to 2, 4\to 3$
(C) $1\to 2, 3\to 1, 3\to 2, 4\to 2, 3\to 4, 4\to 3$ (D) $1\to 2, 2\to 1, 3\to 4, 4\to 3$

Câu 06. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x=x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(C) $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(D) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?
(A) $x \oplus y \oplus z$
(B) $x \wedge y \wedge z$
(C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(B) $a_n = 3^n + 2^n$
(C) $a_n = 3n$
(D) $a_n = n + 3$

Câu 12. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

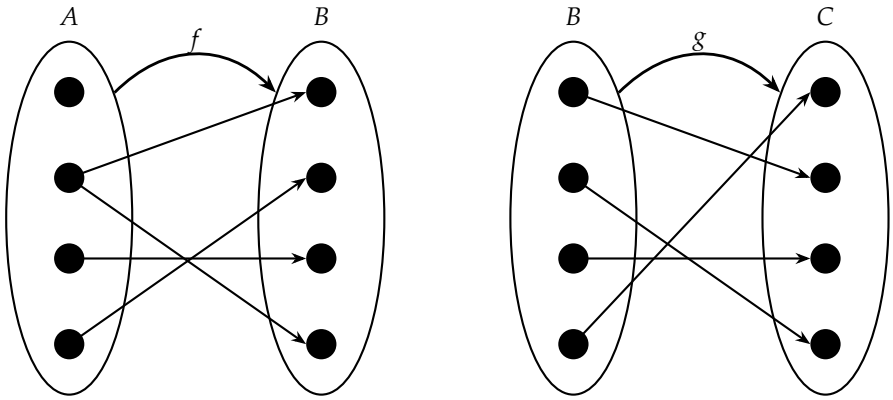
Câu 13. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 14. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$



Hình 1: Các quan hệ f và g.

(A) 10 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 16. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 17. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 19. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 78 (B) 73 (C) 75 (D) 80

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

Câu 24. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n+3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 25. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$

(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

(C) $P(12)$

(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) 0 (C) -1 (D) -2

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 13839606000 (C) 1386011925 (D) 1383960600

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.
(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 32. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x \cdot y)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n \log n)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 34. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m+n)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(n)$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (4)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (5)\\ &= O(1). && && (6) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), 𝒟):
  for x in 𝒟 do
      for y in 𝒟 do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$ (B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **324**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** C	**13.** D	**18.** C	**24.** C	**30.** A	**36.** D
02. D	**08.** D	**14.** A	**19.** B	**25.** B	**31.** C	**37.** D
03. D	**09.** C	**15.** D	**20.** B	**26.** A	**32.** C	**38.** A
04. B	**10.** D	**16.** A	**21.** A	**27.** C	**33.** B	**39.** C
05. A	**11.** A	**17.** C	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**40.** A
06. C	**12.** A		**23.** B	**29.** A	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **834**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y=xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $P(0,3)$ (B) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (C) $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$ (D) $\exists y\,P(4,y)$

Câu 02. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg q \to p$ (B) $q \to \neg p$ (C) $p \to q$ (D) $\neg p \to q$

Câu 03. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\forall x \in \mathbb{N}\exists y \in \mathbb{N}\,(x<y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N}\forall x \in \mathbb{N}\,(x<y)$
(B) Với mọi mệnh đề p,q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p\to q)\to p)\to q$ luôn đúng
(C) Với mọi mệnh đề p,q, mệnh đề $(p\vee q)\vee(p\to q)$ luôn đúng
(D) Cho $P(n)$ là vị từ $1+2+\cdots+n+(n+1)=n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n\in\mathbb{N}\,P(n)\to P(n+1)$ luôn đúng

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 05. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $\forall x\,(P(x)\wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x))\wedge(\forall x\,Q(x))$ (B) $\forall x\,(P(x)\vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x))\vee(\forall x\,Q(x))$
(C) $\forall x\,(P(x)\vee Q(x))\to(\forall x\,P(x))\vee(\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $(\forall x\,P(x))\vee(\forall x\,Q(x))\to\forall x\,(P(x)\vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 06. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy=1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\,((x\neq 0)\to\exists y\,(xy=1))$ (B) $\exists x\,((x\neq 0)\to\exists y\,(xy=1))$
(C) $\forall x\,((x\neq 0)\to\forall y\,(xy=1))$ (D) $\exists x\,((x\neq 0)\to\forall y\,(xy=1))$

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (B) $x \wedge y \wedge z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 08. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \wedge y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \vee y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 10. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 11. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 75 (B) 80 (C) 78 (D) 73

Câu 12. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

Câu 13. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (B) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n+1) \cdot 2^n - 2$

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 5 (B) $\frac{10}{11}$ (C) 10 (D) $\frac{55}{11}$

Câu 15. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (B) $a_n = n^2$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = 2^n$

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) -1
(B) 1
(C) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(D) 0

Câu 18. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \emptyset$ (B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Câu 21. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 22. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$

- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1+n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a,b,c,d, ta có $a+b \geq c+d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1+n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1+0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1+k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1+(k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \tag{10}$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (8) và (9) là tương đương

(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (8) và (9) là tương đương
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (11) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (12) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (13) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (11) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (12) không chính xác

Câu 26. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) -2 (C) -5 (D) 1

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (14)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (15)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (14) không chính xác

Câu 31. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 32. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
  for x in D do
      for y in D do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?
(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 34. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(n)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(\log n)$

Câu 35. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?
(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(B) $5n + 17 \log n$
(C) $2^n \log n + n$
(D) $23n \log \log n + 3n \log n$

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$

Câu 38. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(1)$

Câu 39. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (16)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (17)\\ &= O(1). && && (18) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **834**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** D	**12.** D	**18.** A	**24.** C	**30.** C	**36.** D
02. B	**08.** D	**13.** C	**19.** B	**25.** C	**31.** D	**37.** A
03. B	**09.** D	**14.** B	**20.** B	**26.** B	**32.** C	**38.** A
04. C	**10.** B	**15.** C	**21.** B	**27.** A	**33.** B	**39.** C
05. C	**11.** D	**16.** B	**22.** C	**28.** A	**34.** D	**40.** B
06. A		**17.** A	**23.** C	**29.** B	**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **774**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 02. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 03. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
&\Leftrightarrow 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
&\Leftrightarrow 1+2 = 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
&\Leftrightarrow 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 04. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói thật
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 05. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(B) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(C) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 06. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1, \ldots, n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1, \ldots, n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \ldots, n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$
(B) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(C) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$
(B) $x \wedge y \wedge z$
(C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2
(B) 4
(C) 3
(D) 1

Câu 12. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 13. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 101 (B) 100 (C) 102 (D) 103

Câu 14. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 4/x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = 2^x$ (D) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Câu 15. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(C) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(D) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 73 (B) 78 (C) 80 (D) 75

Câu 18. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 22 (B) 14 (C) 18 (D) 26

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 23. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(C) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 24. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1386011925 (B) 1383960600 (C) 13839606000 (D) 1383960500

Câu 27. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác

Câu 29. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 30. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 31. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 32. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(y)$ (B) $O(x \cdot y)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?
(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $ca^i n^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 34. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 35. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.
(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 36. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?
(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $o(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 37. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), 𝒟):
  for x in 𝒟 do
      for y in 𝒟 do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
   i := i + 1
if x^2 = a_i then
   return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(1)$

Câu 39. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 40. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **774**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**06.** C	**12.** B	**18.** A	**24.** C	**30.** A	**36.** B
02. D	**07.** D	**13.** C	**19.** B	**25.** C	**31.** D	**37.** D
03. A	**08.** C	**14.** D	**20.** D	**26.** A	**32.** C	**38.** A
04. D	**09.** B	**15.** C	**21.** D	**27.** C	**33.** B	**39.** D
05. C	**10.** D	**16.** D	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**40.** C
	11. C	**17.** A	**23.** C	**29.** A	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **589**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(B) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$
(C) $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(D) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 02. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 03. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = n(n + 1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n + 1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$
(B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(C) $x \vee y \vee z$
(D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 08. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 09. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là sai
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 10. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$

Câu 11. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 1
(D) -1

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{j}{j+1}\right)$$

(A) 10 (B) $\frac{10}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{55}{11}$

Câu 13. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Câu 14. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \quad (1)$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \quad (2)$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 15. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(C) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(D) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

Câu 16. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (B) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (C) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (D) $n \cdot 2^{n+1} - 2$

Câu 18. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 75 (B) 80 (C) 73 (D) 78

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (3)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (4)$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (3) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(C) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 26. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (8)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 22 (B) 18 (C) 26 (D) 14

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(10n/11)$
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n^d \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 34. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $5n + 17 \log n$
(B) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(C) $23n \log \log n + 3n \log n$
(D) $2^n \log n + n$

Câu 35. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m + n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m)$

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. Giả sử $A[1 \dots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \dots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \dots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 38. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$T(k+1) = T(k) + O(1) \quad \text{(Giả thiết)} \quad (9)$$
$$= O(1) + O(1) \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (10)$$
$$= O(1). \quad (11)$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n)+g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k)=T(k-1)+O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k)=O(1)$ và $T(k+1)=O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 39. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(n^2)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n^3)$

Câu 40. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
    if n > 1
        m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(n)=2T(n/2)+O(n)$
(B) $T(n)=T(n/2)+O(n)$
(C) $T(n)=T(n/2)+O(1)$
(D) $T(n)=2T(n/2)+O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **589**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**06.** D	**12.** B	**18.** C	**24.** D	**30.** D	**36.** D
02. D	**07.** B	**13.** C	**19.** B	**25.** C	**31.** C	**37.** C
03. D	**08.** B	**14.** C	**20.** D	**26.** D	**32.** A	**38.** D
04. A	**09.** A	**15.** C	**21.** D	**27.** C	**33.** C	**39.** B
05. C	**10.** B	**16.** B	**22.** D	**28.** A	**34.** C	**40.** A
	11. D	**17.** B	**23.** C	**29.** A	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **273**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$ (B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (C) $x \wedge y \wedge z$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 02. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$ (B) $\exists y\, P(4,y)$ (C) $P(0,3)$ (D) $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$

Câu 04. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 05. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$ (B) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$ (D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 06. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 07. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 08. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\, (\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn
(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng

Câu 09. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Chứng minh trên là sai
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 10. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 11. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2x$
(B) $f(x) = 2^x$
(C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$
(D) $f(x) = 4/x$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3^n + 2^n$
(B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(C) $a_n = n + 3$
(D) $a_n = 3n$

Câu 13. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 2
(B) 1
(C) 3
(D) 4

Câu 14. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?
(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 17. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(D) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

Câu 18. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?
(A) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$

Câu 19. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\{\}\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 20. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 4
(B) 2
(C) 3
(D) 1

Câu 21. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) 0
(B) -2
(C) Không thể tính được
(D) -1

Câu 23. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(D) $P(12)$

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1386011925 (B) 13839606000 (C) 1383960600 (D) 1383960500

Câu 25. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) 1 (C) -2 (D) -4

Câu 27. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^{\log_4 2})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n \log n)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 34. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(\log n)$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $c(n/b^i)^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $ca^i(n/b^i)^d$

Câu 36. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m+n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(m \cdot n)$

Câu 37. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
    if n > 1
        m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$

Câu 38. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) 2^{2n} là $O(2^n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 39. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?
(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$

Câu 40. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(n^3)$
(B) $O(n^2)$
(C) $O(1)$
(D) $O(n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **273**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** B	**13.** B	**19.** A	**25.** C	**31.** C	**36.** D
02. A	**08.** D	**14.** A	**20.** B	**26.** D	**32.** D	**37.** A
03. B	**09.** A	**15.** A	**21.** A	**27.** A	**33.** B	**38.** A
04. A	**10.** B	**16.** A	**22.** C	**28.** B	**34.** D	**39.** C
05. A	**11.** C	**17.** A	**23.** C	**29.** B	**35.** D	**40.** D
06. C	**12.** B	**18.** B	**24.** A	**30.** B		

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **148**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Chứng minh trên là sai

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(B) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(C) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 05. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Peter nói thật và Alice nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 07. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng

Câu 08. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?
(A) $x \oplus y \oplus z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (D) $x \wedge y \wedge z$

Câu 09. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\exists i \in \{1, \ldots, n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1, \ldots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1, \ldots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \ldots, n\}\, \text{isUpper}(x_j)$

Câu 10. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$ (B) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(C) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$ (D) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$

Câu 11. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?
(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 12. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}\}$$

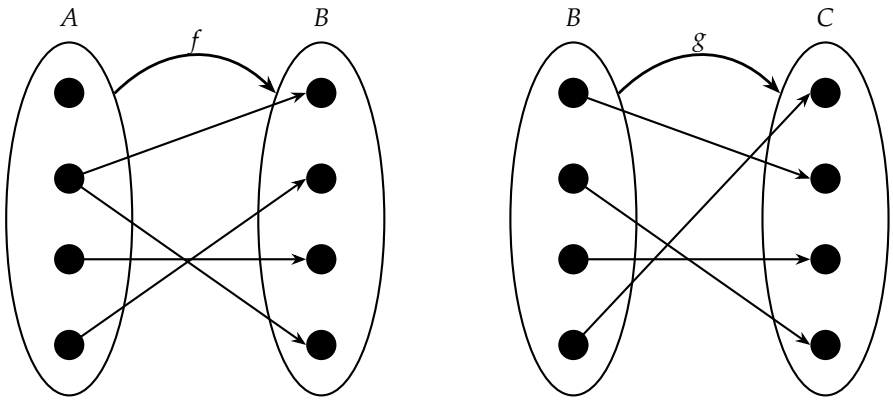
(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

Câu 13. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(B) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh

Câu 14. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
(B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(C) $\emptyset \in \emptyset$
(D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = 2n + 3$
(B) $a_n = n^2$
(C) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$
(D) $a_n = 2^n$

Câu 18. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{Z}$
(B) $A = B = \mathbb{N}$
(C) $A = B = \mathbb{R}$
(D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 19. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 102
(B) 100
(C) 101
(D) 103

Câu 20. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$
(D) $\emptyset = \{\}$

Câu 21. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 22. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 23. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(B) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 24. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000
(B) 1383960500
(C) 1383960600
(D) 1386011925

Câu 26. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên* $n \in \mathbb{N}$, *ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực* a, b, c, d, *ta có* $a + b \geq c + d$ *khi và chỉ khi* $a \geq c$ *và* $b \geq d$.

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (4)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (2) và (3) là tương đương

Câu 27. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 14 (B) 22 (C) 18 (D) 26

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(10n/11)$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n^2)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n)$ (D) $O(1)$

Câu 34. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log 3})$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 35. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(B) $5n + 17 \log n$
(C) $2^n \log n + n$
(D) $23n \log \log n + 3n \log n$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(1)$

Câu 38. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^{d+1})$ (B) $O(n^d \log n)$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m + n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **148**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** D	**13.** B	**19.** A	**25.** D	**30.** D	**36.** C
02. D	**08.** B	**14.** A	**20.** C	**26.** D	**31.** B	**37.** D
03. B	**09.** A	**15.** A	**21.** A	**27.** A	**32.** A	**38.** D
04. B	**10.** D	**16.** C	**22.** A	**28.** D	**33.** C	**39.** B
05. D	**11.** C	**17.** A	**23.** D	**29.** A	**34.** A	**40.** D
06. B	**12.** C	**18.** C	**24.** C		**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **758**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(B) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$
(C) $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(D) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 02. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg q \to p$ (B) $q \to \neg p$ (C) $p \to q$ (D) $\neg p \to q$

Câu 03. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(B) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(D) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 04. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\, \text{isUpper}(x_j)$
(C) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$

Câu 06. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$ (B) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$ (D) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 07. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall x \, \forall y \, P(x,y)$ (B) $\forall y \, \exists x \, P(x,y)$ (C) $P(0,3)$ (D) $\exists y \, P(4,y)$

Câu 08. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R} \, (\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai (B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai (D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng

Câu 09. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$ (B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$ (D) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$

Câu 10. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 11. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 12. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = 4/x$ (D) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Câu 13. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Câu 14. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$

Câu 15. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{j}{j+1}\right)$$

(A) $\frac{55}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{10}{11}$ (D) 5

Câu 17. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 73 (B) 78 (C) 80 (D) 75

Câu 18. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ (B) $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ (C) $n\cdot 2^{n+1}-2$ (D) $(n+1)\cdot 2^n-2$

Câu 20. Cho các tập hợp $A = \{a,b,c,d\}$ và $B = \{1,2,3,4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a,3),(b,4),(c,2),(d,2)\}$
(B) $f = \{(a,3),(b,4),(c,2),(d,1)\}$
(C) $f = \{(a,3),(b,3),(c,3),(d,3)\}$
(D) $f = \{(a,3),(b,4),(c,3),(d,4)\}$

Câu 21. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1+n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên* $n \in \mathbb{N}$, *ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực* a, b, c, d, *ta có* $a + b \geq c + d$ *khi và chỉ khi* $a \geq c$ *và* $b \geq d$.

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (4)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (2) và (3) là tương đương
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1386011925 (C) 1383960500 (D) 1383960600

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 25. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (8)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (9)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) 0 (B) -2 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 33. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1\ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$

(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$ (D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$

Câu 34. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $o(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 35. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
  for x in D do
      for y in D do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(B) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(n^d)$ (C) $O(n^{d+1})$ (D) $O(n^d \log n)$

Câu 37. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m + n)$

Câu 38. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(B) $23n \log \log n + 3n \log n$
(C) $2^n \log n + n$
(D) $5n + 17 \log n$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **758**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** D	**12.** D	**18.** A	**24.** D	**30.** D	**36.** D
02. B	**08.** D	**13.** C	**19.** A	**25.** B	**31.** C	**37.** B
03. B	**09.** A	**14.** C	**20.** B	**26.** D	**32.** C	**38.** B
04. C	**10.** B	**15.** B	**21.** A	**27.** B	**33.** B	**39.** B
05. A	**11.** D	**16.** C	**22.** A	**28.** B	**34.** A	**40.** D
06. C		**17.** A	**23.** B	**29.** A	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **991**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 03. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\ \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\ \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\ \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\ \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều

ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \vee y \vee z$ (B) $x \oplus y \oplus z$ (C) $x \wedge y \wedge z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 07. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng

Câu 08. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$ (B) $x \vee y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \wedge y$

Câu 09. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3^n + 2^n$ (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (C) $a_n = n + 3$ (D) $a_n = 3n$

Câu 13. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$

Câu 14. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

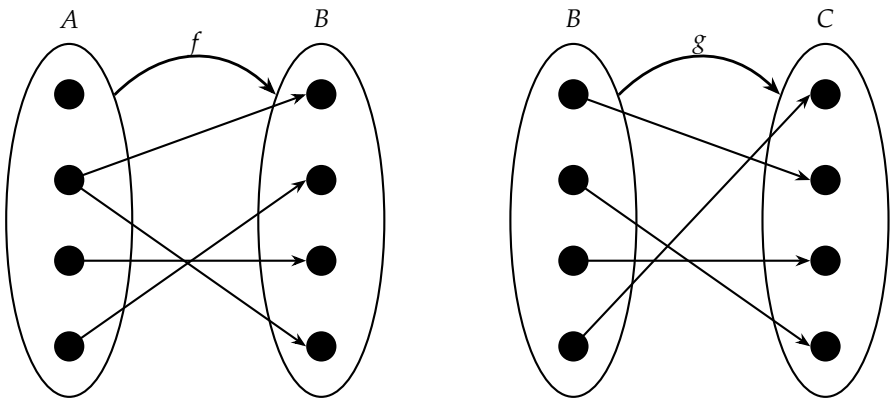
Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 80 (B) 75 (C) 78 (D) 73

Câu 21. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 22. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương

Câu 23. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(B) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) -4 (C) 1 (D) -5

Câu 26. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác

Câu 28. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (10)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (11)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?
(A) 1383960600
(B) 1383960500
(C) 13839606000
(D) 1386011925

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^2 \log n)$
(B) $O(n^{\log 3})$
(C) $O(n^2)$
(D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(10n/11)$
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n)$ (D) $O(1)$

Câu 34. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $c(n/b^i)^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $ca^i(n/b^i)^d$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n\log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Hàm nào sau đây là $\Theta(n\log n)$?

(A) $6n\log n + n^{1.1} + 2$
(B) $23n\log\log n + 3n\log n$
(C) $2^n\log n + n$
(D) $5n + 17\log n$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^{d+1})$ (B) $O(n^d \log n)$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 40. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **991**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**13.** B	**19.** B	**24.** D	**30.** D	**36.** C
02. B	**08.** C	**14.** A	**20.** D	**25.** B	**31.** C	**37.** D
03. A	**09.** A	**15.** A	**21.** A	**26.** B	**32.** A	**38.** B
04. D	**10.** A	**16.** A	**22.** B	**27.** D	**33.** C	**39.** B
05. B	**11.** C	**17.** C	**23.** D	**28.** B	**34.** A	**40.** A
06. A	**12.** B	**18.** B		**29.** D	**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **305**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?
(A) $x \oplus y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \vee y$

Câu 02. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$ (B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$ (D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$ (B) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$

Câu 04. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $\exists y\,P(4, y)$ (B) $\forall y\,\exists x\,P(x, y)$ (C) $\forall x\,\forall y\,P(x, y)$ (D) $P(0, 3)$

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$ (B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$ (D) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 06. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn
(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng (B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng (D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 07. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 08. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 09. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 3 (D) 1

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\frac{10}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{55}{11}$

Câu 13. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 14. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 15. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$

Câu 16. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 17. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\}$
(B) $\emptyset = \{\{\}\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$

Câu 18. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = n^2$ (D) $a_n = 2n + 3$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 22. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(12)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

Câu 24. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (3)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (4)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (3) không chính xác
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 25. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 26. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 27. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 28. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên* $n \in \mathbb{N}$, *ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực* a, b, c, d, *ta có* $a + b \geq c + d$ *khi và chỉ khi* $a \geq c$ *và* $b \geq d$.

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (8)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 14 (B) 22 (C) 18 (D) 26

Câu 31. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(B) $23n \log\log n + 3n \log n$
(C) $5n + 17 \log n$
(D) $2^n \log n + n$

Câu 32. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

Câu 33. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) $x \cdot y^4$ (B) $y \cdot x^4$ (C) x^4 (D) y^4

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n^{2.58})$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (9)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (10)\\ &= O(1). && && (11) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n)+g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k)=O(1)$ và $T(k+1)=O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k)=T(k-1)+O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $o(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i(n/b^i)^d$ (B) $ca^i n^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
   i := i + 1
if x^2 = a_i then
   return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n^3)$

Câu 40. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) 2^{2n} là $O(2^n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **305**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** A	**13.** D	**18.** A	**24.** B	**30.** D	**36.** B
02. C	**08.** A	**14.** A	**19.** B	**25.** B	**31.** B	**37.** A
03. B	**09.** A	**15.** D	**20.** D	**26.** B	**32.** B	**38.** D
04. A	**10.** C	**16.** D	**21.** B	**27.** D	**33.** B	**39.** B
05. A	**11.** C	**17.** B	**22.** B	**28.** A	**34.** C	**40.** D
06. C	**12.** B		**23.** B	**29.** C	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **232**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y=xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0,3)$ (B) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (C) $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$ (D) $\exists y\,P(4,y)$

Câu 02. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(x=z))$
(B) $\exists x\exists y\forall z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y\neq z))$
(C) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y=z))$
(D) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y\neq z))$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x\wedge y$ (B) $x\vee y$ (C) $x\oplus y$ (D) $x\leftrightarrow y$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n\in\mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$
(B) $n+3=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$
(C) $n+4=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$
(D) $n+3=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1\to 2, 1\to 3, 2\to 4, 3\to 4, 4\to 1$
(B) $1\to 3, 2\to 1, 3\to 2, 4\to 1, 4\to 2, 4\to 3$
(C) $1\to 2, 3\to 1, 3\to 2, 4\to 2, 3\to 4, 4\to 3$
(D) $1\to 2, 2\to 1, 3\to 4, 4\to 3$

Câu 06. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x=x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(C) $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(D) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?
(A) $x \oplus y \oplus z$
(B) $x \wedge y \wedge z$
(C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(B) $a_n = 3^n + 2^n$
(C) $a_n = 3n$
(D) $a_n = n + 3$

Câu 12. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

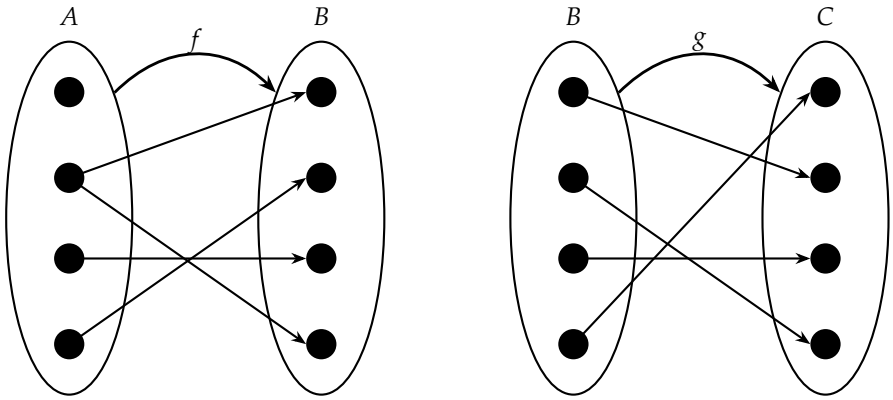
Câu 13. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 14. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$



Hình 1: Các quan hệ f và g.

(A) 10 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 16. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 17. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 19. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 78 (B) 73 (C) 75 (D) 80

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

Câu 24. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n+3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 25. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$

(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

(C) $P(12)$

(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) 0 (C) -1 (D) -2

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 13839606000 (C) 1386011925 (D) 1383960600

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.
(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 32. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x \cdot y)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n \log n)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 34. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m+n)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(n)$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (4)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (5)\\ &= O(1). && && (6) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), 𝒟):
  for x in 𝒟 do
      for y in 𝒟 do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$ (B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **232**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** C	**13.** D	**18.** C	**24.** C	**30.** A	**36.** D
02. D	**08.** D	**14.** A	**19.** B	**25.** B	**31.** C	**37.** D
03. D	**09.** C	**15.** D	**20.** B	**26.** A	**32.** C	**38.** A
04. B	**10.** D	**16.** A	**21.** A	**27.** C	**33.** B	**39.** C
05. A	**11.** A	**17.** C	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**40.** A
06. C	**12.** A		**23.** B	**29.** A	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **326**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 02. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\, \text{isUpper}(x_j)$
(D) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$

Câu 05. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là sai
(B) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$$p = \text{“Tôi đi bơi.”}$$
$$q = \text{“Trời mưa.”}$$

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Tôi không đi bơi khi trời mưa.”

(A) $p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 07. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$

Câu 08. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 09. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$ (B) $x \wedge y \wedge z$ (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 12. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 13. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

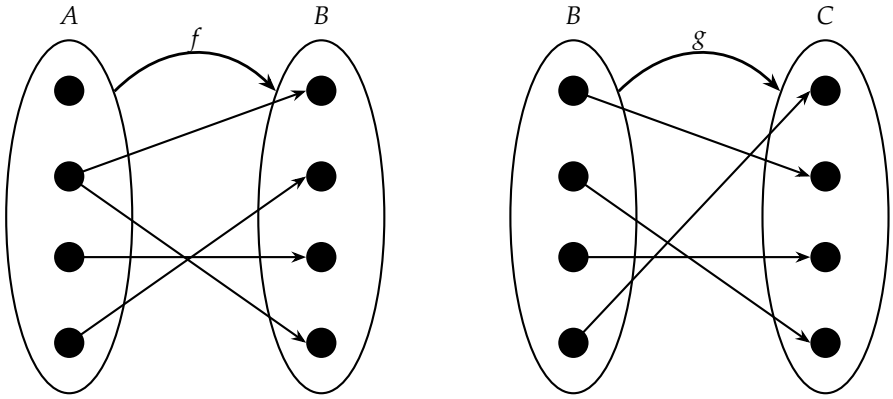
(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 14. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 15. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?
(A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 1
(C) -1
(D) 0

Câu 16. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?
(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$

Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 2
(B) 4
(C) 1
(D) 3

Câu 19. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$
(B) $f(x) = 4/x$
(C) $f(x) = 2x$
(D) $f(x) = 2^x$

Câu 20. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 21. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12), P(13), P(14)$

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) 0
(B) -2
(C) Không thể tính được
(D) -1

Câu 23. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 24. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(C) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 25. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 22 (B) 18 (C) 26 (D) 14

Câu 28. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (4) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (5) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$

- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$

(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

(C) $f(n) = O(n^{2.32})$

(D) $f(n) = O(n^5)$

Câu 32. Giả sử $A[1 \dots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \dots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post} - 1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \dots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post - 1)·k + 1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$

(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 33. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$

(C) 2^{2n} là $O(2^n)$

(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 34. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log 3})$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 35. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$ (B) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (D) $T(n) = T(n/2) + O(n)$

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n)$

Câu 37. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (6)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (7)\\ &= O(1). && && (8) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n \log n)$
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(10n/11)$

Câu 40. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FibMergeSort(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FibMergeSort(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FibMergeSort(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      Merge(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
Merge(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m+1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j+1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else
          B[k] := A[j]; j := j+1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **326**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** D	**13.** B	**19.** A	**24.** C	**30.** D	**36.** D
02. B	**08.** D	**14.** D	**20.** D	**25.** B	**31.** B	**37.** D
03. A	**09.** B	**15.** C	**21.** A	**26.** B	**32.** B	**38.** A
04. B	**10.** D	**16.** B	**22.** C	**27.** C	**33.** C	**39.** A
05. A	**11.** B	**17.** C	**23.** D	**28.** A	**34.** A	**40.** B
06. B	**12.** B	**18.** C		**29.** D	**35.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **978**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ 2 &= 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ 1+2 &= 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ 3 &= 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 03. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói thật
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 04. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$

Câu 05. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y\,\exists x\,P(x, y)$ (B) $\forall x\,\forall y\,P(x, y)$ (C) $\exists y\,P(4, y)$ (D) $P(0, 3)$

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 08. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \oplus y \oplus z$ (C) $x \vee y \vee z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 10. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ (B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ (D) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 11. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 1
(D) -1

Câu 12. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100}\prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 103 (B) 101 (C) 100 (D) 102

Câu 13. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C-(B\cup A)=(C-B)-A$ (B) $A-(B\cup C)=(B-C)-A$
(C) $C-(B\cup A)=(C-A)-B$ (D) $A-(B\cup C)=(A-C)-B$

Câu 14. Cho $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}$ và x chẵn$\}$ và $B=\{x \mid x\in\mathbb{Z}$ và $-4<x<17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) A là tập hữu hạn (B) $B\subseteq A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai (D) $A\subset A$

Câu 15. Cho các tập hợp $A=\{a,b,c,d\}$ và $B=\{1,2,3,4\}$. Quan hệ $f\subseteq A\times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f=\{(a,3),(b,4),(c,2),(d,2)\}$ (B) $f=\{(a,3),(b,3),(c,3),(d,3)\}$
(C) $f=\{(a,3),(b,4),(c,3),(d,4)\}$ (D) $f=\{(a,3),(b,4),(c,2),(d,1)\}$

Câu 16. Cho các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x<y$ thì $f(x)<f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(C) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{j}{j+1}\right)$$

(A) 5 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 10 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n\geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n=3\cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n=3^n+2^n$ (C) $a_n=n+3$ (D) $a_n=3n$

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A,B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A\cap B)\subseteq\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$ (B) $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$ (D) $\mathcal{P}(A\cup B)\subseteq\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+2=0\}$ (B) $\emptyset=\{x\in\mathbb{Z} \mid 2x=3\}$
(C) $\emptyset=\{\{\}\}$ (D) $\emptyset=\{\}$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2} & (n>2)\\ a_1=0, a_2=9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n\leq n$ (B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n\leq 3\cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n\leq 2\cdot 3^n$ (D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n\leq 5\cdot 2^n$

Câu 22. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (8)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1386011925 (B) 13839606000 (C) 1383960600 (D) 1383960500

Câu 25. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) 1 (C) -2 (D) -4

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 22 (B) 18 (C) 26 (D) 14

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (9)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (10)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (9) không chính xác

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(n)$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n^2)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (B) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$ (D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 34. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 35. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^{\log 3})$

Câu 36. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FibMergeSort sau của thuật toán MergeSort để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FibMergeSort được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FibMergeSort(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FibMergeSort(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FibMergeSort(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      Merge(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
Merge(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m+1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j+1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else
          B[k] := A[j]; j := j+1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ (D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

Câu 37. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(1)$

Câu 38. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{2n} là $O(2^n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **978**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** A	**13.** B	**18.** A	**24.** A	**30.** B	**36.** C
02. D	**08.** A	**14.** C	**19.** D	**25.** C	**31.** A	**37.** D
03. C	**09.** C	**15.** D	**20.** C	**26.** D	**32.** A	**38.** A
04. A	**10.** B	**16.** D	**21.** B	**27.** C	**33.** D	**39.** B
05. C	**11.** D	**17.** D	**22.** A	**28.** C	**34.** D	**40.** B
06. D	**12.** D		**23.** C	**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **831**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 02. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(D) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?
(A) $x \wedge y$
(B) $x \vee y$
(C) $x \oplus y$
(D) $x \leftrightarrow y$

Câu 04. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 05. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 06. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\exists y\, P(4, y)$ (B) $P(0, 3)$ (C) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$ (D) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$

Câu 07. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 08. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 09. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

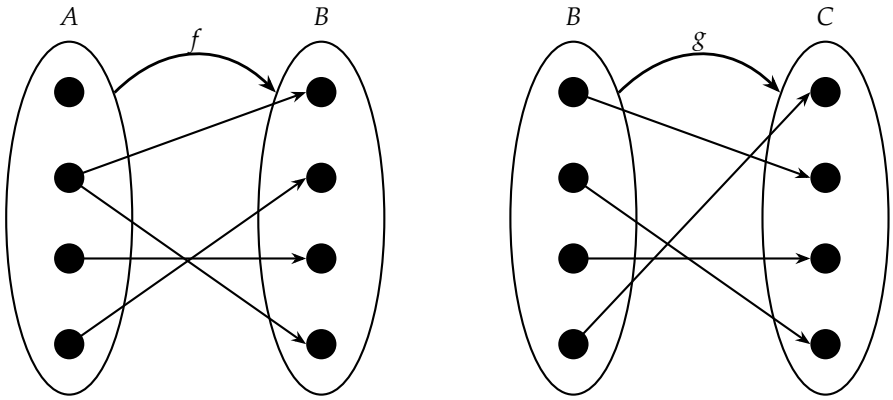
(A) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(B) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(C) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(D) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$

Câu 11. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n - 1), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n - 1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n - 3), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n - 3), a_1 = 3$

Câu 12. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Câu 13. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 14. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 4/x$
(B) $f(x) = 2x$
(C) $f(x) = 2^x$
(D) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Câu 15. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{N}$
(B) $A = B = \mathbb{Q}$
(C) $A = B = \mathbb{R}$
(D) $A = B = \mathbb{Z}$

Câu 16. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3n$
(B) $a_n = 3^n + 2^n$
(C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(D) $a_n = n + 3$

Câu 17. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) -1
(B) 1
(C) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(D) 0

Câu 18. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Câu 19. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(B) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(C) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(D) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$

Câu 20. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $B \subseteq A$
(C) $A \subset A$
(D) A là tập hữu hạn

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 22. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 18 (B) 26 (C) 22 (D) 14

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) -1 (C) 0 (D) -2

Câu 25. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

Câu 27. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(B) $P(15)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(D) $P(12)$

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1
(B) -4
(C) -5
(D) -2

Câu 30. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 31. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x)$
(B) $O(y)$
(C) $O(1)$
(D) $O(x \cdot y)$

Câu 32. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (7)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= O(1). && && (9) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

Câu 33. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{2n} là $O(2^n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.32})$
(B) $f(n) = O(n)$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n^5)$

Câu 35. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^{\log 3})$

Câu 36. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 37. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(\log n)$ (D) $O(n)$

Câu 38. Hàm LogicalValue sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
  for x in D do
      for y in D do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$ (B) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 39. Hàm SuperPower sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SuperPower(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SuperPower(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SuperPower(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) $y \cdot x^4$ (B) x^4 (C) y^4 (D) $x \cdot y^4$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **831**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**06.** A	**12.** C	**18.** B	**24.** A	**30.** A	**36.** A
02. D	**07.** B	**13.** D	**19.** B	**25.** B	**31.** C	**37.** C
03. D	**08.** D	**14.** D	**20.** A	**26.** B	**32.** C	**38.** D
04. D	**09.** B	**15.** C	**21.** C	**27.** A	**33.** C	**39.** A
05. A	**10.** D	**16.** C	**22.** B	**28.** B	**34.** C	**40.** B
	11. B	**17.** A	**23.** B	**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **074**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \wedge y$ (B) $x \vee y$ (C) $x \oplus y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 04. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\ (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\ \text{isUpper}(x_j)$
(D) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều

ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (C) $x \vee y \vee z$ (D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 06. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là đúng
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 07. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

> $1 = 2$ (Điều phải chứng minh) (1)
> $\Leftrightarrow 2 = 1$ (Đối xứng) (2)
> $\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$ (Cộng theo vế (1) và (2)) (3)
> $\Leftrightarrow 3 = 3.$ (4)
>
> Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 08. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói thật
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 09. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y \, \exists x \, P(x, y)$ (B) $P(0, 3)$ (C) $\exists y \, P(4, y)$ (D) $\forall x \, \forall y \, P(x, y)$

Câu 10. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$ (B) $\neg p \to q$ (C) $\neg q \to p$ (D) $p \to q$

Câu 11. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 13. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

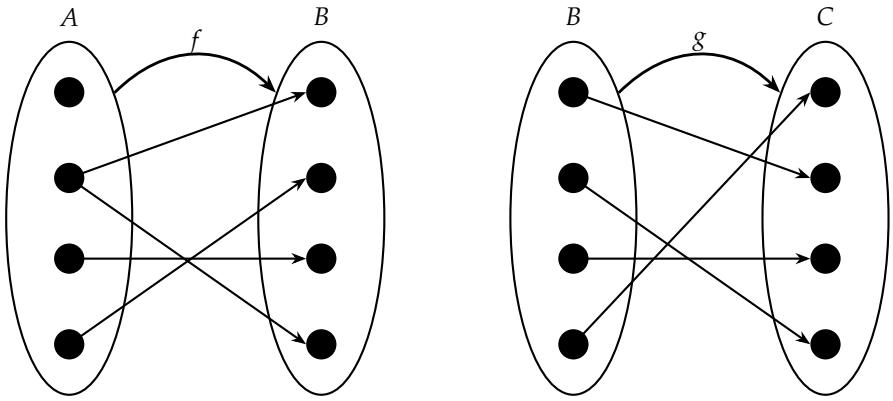
$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Câu 14. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(C) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(C) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 17. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 18. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 75 (B) 80 (C) 73 (D) 78

Câu 19. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (B) $f(x) = 4/x$ (C) $f(x) = 2x$ (D) $f(x) = 2^x$

Câu 20. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 103 (B) 101 (C) 102 (D) 100

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ và $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ cũng đúng

Câu 24. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1383960500 (C) 1383960600 (D) 1386011925

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 22 (B) 14 (C) 18 (D) 26

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n^2)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 34. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 35. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n\log n + n^{1.1} + 2$
(B) $5n + 17\log n$
(C) $2^n \log n + n$
(D) $23n \log\log n + 3n\log n$

Câu 36. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$ (B) $O(1)$ (C) $O(y)$ (D) $O(x)$

Câu 37. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(1)$

Câu 38. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FibMergeSort sau của thuật toán MergeSort để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FibMergeSort được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FibMergeSort(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ−1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FibMergeSort(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FibMergeSort(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      Merge(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
Merge(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **074**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** B	**13.** B	**19.** A	**25.** D	**30.** A	**36.** B
02. D	**08.** A	**14.** D	**20.** C	**26.** D	**31.** C	**37.** B
03. D	**09.** C	**15.** A	**21.** D	**27.** D	**32.** A	**38.** C
04. B	**10.** A	**16.** D	**22.** A	**28.** D	**33.** D	**39.** A
05. C	**11.** B	**17.** A	**23.** B	**29.** B	**34.** B	**40.** D
06. C	**12.** C	**18.** C	**24.** C		**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **927**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

Câu 02. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \wedge y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \vee y$ (D) $x \oplus y$

Câu 06. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 07. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 10. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0, 3)$ (B) $\forall y\,\exists x\,P(x, y)$ (C) $\forall x\,\forall y\,P(x, y)$ (D) $\exists y\,P(4, y)$

Câu 11. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = 3^n + 2^n$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = n + 3$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 13. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 75 (B) 73 (C) 78 (D) 80

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 15. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) 2

Câu 16. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 18. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{10}{11}$ (B) 10 (C) 5 (D) $\frac{55}{11}$

Câu 19. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$ (B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$ (D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$

Câu 20. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 21. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$ (B) $P(12)$
(C) $P(15)$ (D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1386011925 (C) 1383960500 (D) 1383960600

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) -2 (C) 1 (D) -4

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?
(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 29. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 32. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$
(B) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$
(C) $f(x)$ là $o(g(x))$
(D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 33. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{2n} là $O(2^n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 34. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n - 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) y^4
(B) x^4
(C) $y \cdot x^4$
(D) $x \cdot y^4$

Câu 35. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 36. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n\log n)$

Câu 37. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (10)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (11)\\ &= O(1). && && (12) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2\log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **927**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**12.** C	**18.** A	**24.** D	**30.** A	**36.** A
02. B	**08.** C	**13.** B	**19.** C	**25.** C	**31.** B	**37.** D
03. B	**09.** D	**14.** B	**20.** C	**26.** D	**32.** C	**38.** D
04. B	**10.** D	**15.** C	**21.** A	**27.** D	**33.** C	**39.** D
05. B	**11.** A	**16.** C	**22.** D	**28.** B	**34.** C	**40.** D
06. A		**17.** A	**23.** B	**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **692**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 03. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 04. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$

Câu 05. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(B) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(C) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 06. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là đúng
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 07. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 08. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $P(0, 3)$ (B) $\exists y\, P(4, y)$ (C) $\forall x \forall y\, P(x, y)$ (D) $\forall y \exists x\, P(x, y)$

Câu 09. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$$p = \text{"Tôi đi bơi."}$$
$$q = \text{"Trời mưa."}$$

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$ (B) $\neg p \to q$ (C) $\neg q \to p$ (D) $p \to q$

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{10}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{55}{11}$ (D) 5

Câu 12. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{N}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{R}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 13. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$

Câu 14. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

Câu 15. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Câu 16. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 102 (B) 103 (C) 101 (D) 100

Câu 17. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) A là tập hữu hạn
(B) $A \subset A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai
(D) $B \subseteq A$

Câu 18. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân

Câu 19. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\{\}\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 20. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (4)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (5)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) -1 (B) Không thể tính được (C) -2 (D) 0

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 25. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 26. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?
(A) 22 (B) 18 (C) 26 (D) 14

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (9)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (7) và (8) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (7) và (8) là tương đương

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?
(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(B) $23n \log \log n + 3n \log n$
(C) $5n + 17 \log n$
(D) $2^n \log n + n$

Câu 32. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$ (B) $O(\log n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 33. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (B) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$ (D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 34. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{n+1} là $O(2^n)$ (B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$ (D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 35. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m + n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m)$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(n^d)$ (C) $O(n^{d+1})$ (D) $O(n^d \log n)$

Câu 37. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, \frac{n^2}{1000000}, n \log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 38. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x)$ (B) $O(y)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(1)$

Câu 39. Giả sử $A[1 \dots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \dots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \dots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 40. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **692**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** C	**13.** A	**19.** A	**25.** D	**31.** B	**37.** D
02. A	**08.** B	**14.** B	**20.** D	**26.** B	**32.** B	**38.** D
03. A	**09.** B	**15.** A	**21.** B	**27.** C	**33.** D	
04. A	**10.** A	**16.** A	**22.** D	**28.** B	**34.** B	**39.** D
05. C	**11.** A	**17.** C	**23.** B	**29.** B	**35.** A	
06. C	**12.** C	**18.** D	**24.** D	**30.** B	**36.** D	**40.** C

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **811**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$ (B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (C) $x \wedge y \wedge z$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 02. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$ (B) $\exists y\, P(4,y)$ (C) $P(0,3)$ (D) $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$

Câu 04. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 05. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$ (B) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$ (D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 06. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 07. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 08. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn
(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng

Câu 09. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Chứng minh trên là sai
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 10. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 11. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2x$
(B) $f(x) = 2^x$
(C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$
(D) $f(x) = 4/x$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3^n + 2^n$
(B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(C) $a_n = n + 3$
(D) $a_n = 3n$

Câu 13. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 2
(B) 1
(C) 3
(D) 4

Câu 14. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?
(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 17. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(D) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

Câu 18. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?
(A) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$

Câu 19. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\{\}\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 20. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 4
(B) 2
(C) 3
(D) 1

Câu 21. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) 0
(B) -2
(C) Không thể tính được
(D) -1

Câu 23. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(D) $P(12)$

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1386011925 (B) 13839606000 (C) 1383960600 (D) 1383960500

Câu 25. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) 1 (C) -2 (D) -4

Câu 27. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^{\log_4 2})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n \log n)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 34. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(\log n)$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $c(n/b^i)^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $ca^i(n/b^i)^d$

Câu 36. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m+n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(m \cdot n)$

Câu 37. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
    if n > 1
        m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$

Câu 38. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) 2^{2n} là $O(2^n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 39. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?
(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$

Câu 40. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(n^3)$
(B) $O(n^2)$
(C) $O(1)$
(D) $O(n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **811**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** B	**13.** B	**19.** A	**25.** C	**31.** C	**36.** D
02. A	**08.** D	**14.** A	**20.** B	**26.** D	**32.** D	**37.** A
03. B	**09.** A	**15.** A	**21.** A	**27.** A	**33.** B	**38.** A
04. A	**10.** B	**16.** A	**22.** C	**28.** B	**34.** D	**39.** C
05. A	**11.** C	**17.** A	**23.** C	**29.** B	**35.** D	**40.** D
06. C	**12.** B	**18.** B	**24.** A	**30.** B		

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **329**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$ (B) $P(0, 3)$ (C) $\exists y\, P(4, y)$ (D) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$

Câu 03. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói thật
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 04. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \oplus y$

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(D) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 07. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(B) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(D) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 10. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 11. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$
(D) $\emptyset = \{\}$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$
(B) $a_n = 2^n$
(C) $a_n = 2n + 3$
(D) $a_n = n^2$

Câu 13. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 14. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

Câu 15. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3^n + 2^n$ (B) $a_n = 3n$ (C) $a_n = n + 3$ (D) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{55}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{10}{11}$ (D) 5

Câu 17. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$

Câu 18. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 19. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 102 (B) 100 (C) 101 (D) 103

Câu 20. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{N}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{Q}$ (D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 22. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(12)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 23. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) -2 (C) 1 (D) -4

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} \quad (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -1 (B) -2 (C) 0 (D) Không thể tính được

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 27. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ và $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ cũng đúng

Câu 28. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

Ⓐ 1383960600 Ⓑ 1383960500 Ⓒ 1386011925 Ⓓ 13839606000

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

Ⓐ $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
Ⓑ $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
Ⓒ $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
Ⓓ $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

Ⓐ $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$ Ⓑ $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
Ⓒ $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$ Ⓓ $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 32. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

Ⓐ $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ Ⓑ $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
Ⓒ $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ Ⓓ $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 33. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

Ⓐ $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ Ⓑ $g(x)$ là $O(f(x))$ Ⓒ $f(x)$ là $O(g(x))$ Ⓓ $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 34. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), 𝒟):
    for x in 𝒟 do
        for y in 𝒟 do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\exists x \in \mathcal{D} \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(D) $\forall x \in \mathcal{D} \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$

Câu 35. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i-1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 36. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$
(B) $O(1)$
(C) $O(y)$
(D) $O(x)$

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\omega(g(x))$

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^{2.32})$
(D) $f(n) = O(n^5)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^2)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **329**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** C	**13.** D	**19.** A	**25.** D	**31.** B	**37.** B
02. C	**08.** C	**14.** B	**20.** D	**26.** D	**32.** C	**38.** A
03. C	**09.** C	**15.** D	**21.** A	**27.** C	**33.** D	
04. C	**10.** B	**16.** C	**22.** B	**28.** B	**34.** A	**39.** A
05. B	**11.** C	**17.** D	**23.** D	**29.** C	**35.** C	
06. C	**12.** C	**18.** D	**24.** D	**30.** B	**36.** B	**40.** B

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **226**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \vee y$

Câu 02. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ (B) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$ (D) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$ (B) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1+2 = 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$$p = \text{“Tôi đi bơi.”}$$
$$q = \text{“Trời mưa.”}$$

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Tôi không đi bơi khi trời mưa.”

(A) $\neg p \to q$ (B) $\neg q \to p$ (C) $p \to q$ (D) $q \to \neg p$

Câu 06. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$ (B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$ (D) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 07. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\, (\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai (B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai (D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 08. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

(A) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$ (B) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$ (D) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 09. Gọi $P(x,y)$ là vị từ “x chơi pickleball với y”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (B) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$ (B) $x \wedge y \wedge z$ (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{10}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{55}{11}$ (D) 5

Câu 12. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x,x,x)) \in f \tag{5}$$
$$((x,y,z), x+y+z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(B) $a_n = n + 3$
(C) $a_n = 3n$
(D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 14. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 1
(B) 2
(C) 4
(D) 3

Câu 15. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 80
(B) 78
(C) 73
(D) 75

Câu 16. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 3
(B) 4
(C) 2
(D) 1

Câu 17. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(D) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

Câu 18. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{Z}$
(B) $A = B = \mathbb{N}$
(C) $A = B = \mathbb{R}$
(D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 19. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) $A \subset A$
(B) A là tập hữu hạn
(C) $B \subseteq A$
(D) Cả ba phát biểu khác đều sai

Câu 20. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$

Câu 21. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 22. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 18 (B) 26 (C) 22 (D) 14

Câu 24. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (10)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (8) và (9) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (8) và (9) là tương đương

Câu 25. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 26. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4,5,6,\ldots,k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 32. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$ (B) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$ (D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 33. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $O(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 34. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 35. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^{\log 3})$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (11)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (12)\\ &= O(1). && && (13) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 38. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{2n} là $O(2^n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 39. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$
(B) $O(x)$
(C) $O(1)$
(D) $O(x \cdot y)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **226**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** B	**13.** A	**19.** D	**25.** C	**31.** B	**37.** D
02. D	**08.** B	**14.** A	**20.** B	**26.** A	**32.** C	**38.** A
03. B	**09.** A	**15.** C	**21.** B	**27.** D	**33.** D	
04. B	**10.** D	**16.** C	**22.** A	**28.** A	**34.** B	**39.** C
05. D	**11.** A	**17.** A	**23.** B	**29.** B	**35.** B	
06. C	**12.** A	**18.** C	**24.** D	**30.** B	**36.** C	**40.** B

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **918**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$ (B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (C) $x \wedge y \wedge z$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 02. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

Câu 03. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
&\Leftrightarrow 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
&\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
&\Leftrightarrow 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+3=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+4=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+3=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \to (z=y \vee z=x)))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \to (z=y \vee z=x)))$

Câu 06. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y=xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\exists y\, P(4,y)$ (B) $P(0,3)$ (C) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$ (D) $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$

Câu 07. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x|+|y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 08. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(D) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$

Câu 09. Cho p và q là các mệnh đề sau:

p = "Tôi đi bơi."
q = "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 10. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 11. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C-(B\cup A)=(C-B)-A$ (B) $A-(B\cup C)=(A-C)-B$
(C) $C-(B\cup A)=(C-A)-B$ (D) $A-(B\cup C)=(B-C)-A$

Câu 12. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+2=0\}$ (B) $\emptyset=\{x\in\mathbb{Z}\mid 2x=3\}$
(C) $\emptyset=\{\}$ (D) $\emptyset=\{\{\}\}$

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n\geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n=3\cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n=n+3$ (C) $a_n=3n$ (D) $a_n=3^n+2^n$

Câu 14. Cho quan hệ $f\subseteq A\times B$ định nghĩa bởi $f=\{(n,\sqrt{n})\mid n\in A\wedge\sqrt{n}\in B\}$ trong đó A,B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A=B=\mathbb{R}$ (B) $A=B=\mathbb{Z}$ (C) $A=B=\mathbb{N}$ (D) $A=B=\mathbb{Q}$

Câu 15. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset\},\{\emptyset\}\}$$

(A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) 2

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{j}{j+1}\right)$$

(A) $\frac{55}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{10}{11}$ (D) 5

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n\geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n=2n+3$ (B) $a_n=n^2$ (C) $a_n=\frac{n}{n+1}$ (D) $a_n=2^n$

Câu 18. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n}i\cdot 2^i$$

(A) $n\cdot 2^{n+1}-2$ (B) $(n+1)\cdot 2^n-2$ (C) $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ (D) $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

Câu 19. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100}\prod_{k=n}^{2}k$$

(A) 102 (B) 100 (C) 101 (D) 103

Câu 20. Cho các tập hợp $A=\{a,b,c,d\}$ và $B=\{1,2,3,4\}$. Quan hệ $f\subseteq A\times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f=\{(a,3),(b,4),(c,2),(d,2)\}$ (B) $f=\{(a,3),(b,4),(c,2),(d,1)\}$
(C) $f=\{(a,3),(b,3),(c,3),(d,3)\}$ (D) $f=\{(a,3),(b,4),(c,3),(d,4)\}$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n}2^i=2^{n+1}-1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$P(k+1) = 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} \quad \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} \quad (5)$$
$$= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (6)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (7)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác

Câu 22. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 23. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (8)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (9)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác

(C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) -1 (C) 0 (D) -2

Câu 25. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\displaystyle\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1.$

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (11)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (12)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (13)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (11) và (12) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (11) và (12) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 26 (B) 14 (C) 18 (D) 22

Câu 27. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) 1 (C) -2 (D) -5

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 13839606000 (D) 1386011925

Câu 31. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (14)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (15)\\ &= O(1). && && (16) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 32. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

Câu 33. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
  for x in D do
      for y in D do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(B) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 34. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 35. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x)$ (B) $O(1)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(y)$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(n^d)$ (C) $O(n^{d+1})$ (D) $O(n^d \log n)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 38. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post} - 1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 39. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?
(A) $y \cdot x^4$ (B) x^4 (C) y^4 (D) $x \cdot y^4$

Câu 40. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?
(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **918**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**06.** A	**12.** D	**18.** D	**24.** A	**30.** D	**36.** D
02. D	**07.** A	**13.** A	**19.** A	**25.** B	**31.** C	**37.** A
03. A	**08.** D	**14.** A	**20.** B	**26.** A	**32.** B	**38.** C
04. B	**09.** B	**15.** B	**21.** B	**27.** D	**33.** D	**39.** A
05. D	**10.** C	**16.** C	**22.** A	**28.** A	**34.** B	**40.** D
	11. D	**17.** A	**23.** A	**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **733**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$
(B) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$

Câu 03. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$ (B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$

Câu 08. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0,3)$ (B) $\exists y\, P(4,y)$ (C) $\forall x \forall y\, P(x,y)$ (D) $\forall y \exists x\, P(x,y)$

Câu 09. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 10. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p,q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p,q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng

Câu 11. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9,9,9,9,9,\ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n+1)\cdot 2^n - 2$ (B) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (C) $(n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 13. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$ (B) A là tập hữu hạn
(C) $A \subset A$ (D) Cả ba phát biểu khác đều sai

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 16. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 78 (B) 80 (C) 75 (D) 73

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2n + 3$ (B) $a_n = n^2$ (C) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (D) $a_n = 2^n$

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(B) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(C) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) 0 (B) -2 (C) Không thể tính được (D) -1

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên* $n \in \mathbb{N}$, *ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực* a, b, c, d, *ta có* $a + b \geq c + d$ *khi và chỉ khi* $a \geq c$ *và* $b \geq d$.

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$P(k+1) = 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} \quad \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} \quad (7)$$
$$= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (8)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (9)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (10)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (11)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác

Câu 26. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

Câu 27. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 14 (B) 22 (C) 26 (D) 18

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -2 (D) -5

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $ca^i (n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $c(n/a^i)^d$

Câu 32. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^{\log_3 2})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 33. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m \cdot n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 34. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (12)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (13)\\ &= O(1). && && (14) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (B) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$ (D) 2^{2n} là $O(2^n)$

Câu 37. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i-1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 39. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$
(B) $O(n \log n)$
(C) $O(n)$
(D) $O(\log n)$

Câu 40. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **733**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** D	**18.** B	**24.** C	**30.** B	**36.** D
02. C	**08.** B	**14.** B	**19.** B	**25.** A	**31.** B	**37.** D
03. C	**09.** A	**15.** D	**20.** C	**26.** D	**32.** C	**38.** C
04. B	**10.** D	**16.** D	**21.** B	**27.** C	**33.** C	**39.** D
05. A	**11.** C	**17.** A	**22.** C	**28.** A	**34.** A	**40.** D
06. D	**12.** D		**23.** C	**29.** C	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **938**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y=xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0,3)$ (B) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (C) $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$ (D) $\exists y\,P(4,y)$

Câu 02. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(x=z))$ (B) $\exists x\exists y\forall z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y\neq z))$
(C) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y=z))$ (D) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y\neq z))$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x\wedge y$ (B) $x\vee y$ (C) $x\oplus y$ (D) $x\leftrightarrow y$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n\in\mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$ (B) $n+3=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$
(C) $n+4=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$ (D) $n+3=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1\to 2, 1\to 3, 2\to 4, 3\to 4, 4\to 1$ (B) $1\to 3, 2\to 1, 3\to 2, 4\to 1, 4\to 2, 4\to 3$
(C) $1\to 2, 3\to 1, 3\to 2, 4\to 2, 3\to 4, 4\to 3$ (D) $1\to 2, 2\to 1, 3\to 4, 4\to 3$

Câu 06. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x=x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(C) $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(D) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?
(A) $x \oplus y \oplus z$
(B) $x \wedge y \wedge z$
(C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(B) $a_n = 3^n + 2^n$
(C) $a_n = 3n$
(D) $a_n = n + 3$

Câu 12. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

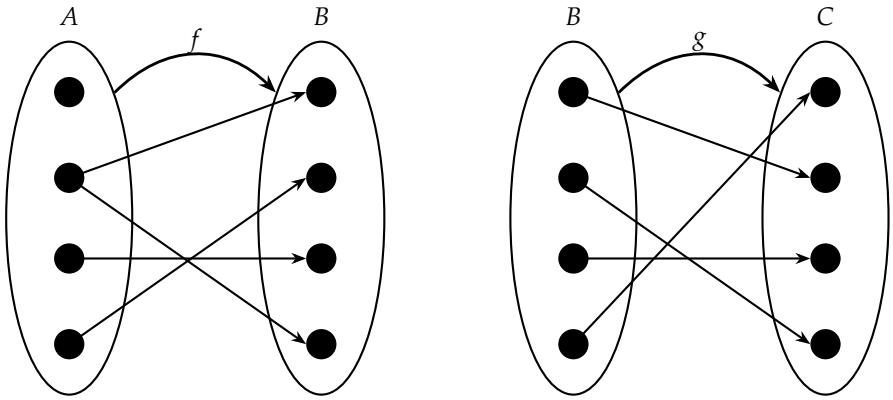
Câu 13. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 14. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$



Hình 1: Các quan hệ f và g.

(A) 10 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 16. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 17. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 19. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 78 (B) 73 (C) 75 (D) 80

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

Câu 24. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n+3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 25. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$

(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

(C) $P(12)$

(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) 0 (C) -1 (D) -2

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 13839606000 (C) 1386011925 (D) 1383960600

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.
(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 32. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x \cdot y)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n \log n)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 34. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m+n)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(n)$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (4)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (5)\\ &= O(1). && && (6) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), 𝒟):
  for x in 𝒟 do
      for y in 𝒟 do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$ (B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **938**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** C	**13.** D	**18.** C	**24.** C	**30.** A	**36.** D
02. D	**08.** D	**14.** A	**19.** B	**25.** B	**31.** C	**37.** D
03. D	**09.** C	**15.** D	**20.** B	**26.** A	**32.** C	**38.** A
04. B	**10.** D	**16.** A	**21.** A	**27.** C	**33.** B	**39.** C
05. A	**11.** A	**17.** C	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**40.** A
06. C	**12.** A		**23.** B	**29.** A	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **318**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 02. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\, \text{isUpper}(x_j)$
(D) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$

Câu 05. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là sai
(B) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$$p = \text{“Tôi đi bơi.”}$$
$$q = \text{“Trời mưa.”}$$

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Tôi không đi bơi khi trời mưa.”

(A) $p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 07. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$ (B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$ (D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$

Câu 08. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$ (B) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$ (D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 09. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối (B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật (D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$ (B) $x \wedge y \wedge z$ (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ (B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 12. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 13. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

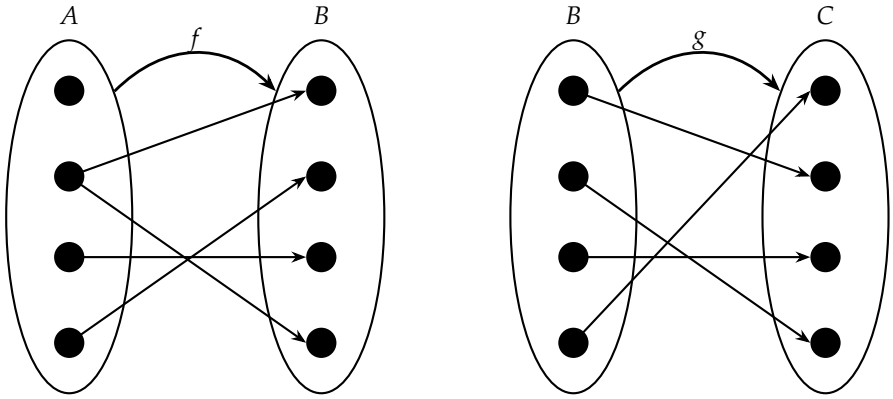
(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 14. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 15. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?
(A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 1
(C) -1
(D) 0

Câu 16. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?
(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$

Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 2
(B) 4
(C) 1
(D) 3

Câu 19. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$
(B) $f(x) = 4/x$
(C) $f(x) = 2x$
(D) $f(x) = 2^x$

Câu 20. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 21. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12), P(13), P(14)$

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) 0
(B) -2
(C) Không thể tính được
(D) -1

Câu 23. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 24. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(C) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 25. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 22 (B) 18 (C) 26 (D) 14

Câu 28. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (4)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (5)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$

- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n\log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$

(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

(C) $f(n) = O(n^{2.32})$

(D) $f(n) = O(n^5)$

Câu 32. Giả sử $A[1\ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$

(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 33. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$

(C) 2^{2n} là $O(2^n)$

(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 34. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log 3})$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 35. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$ (B) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (D) $T(n) = T(n/2) + O(n)$

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n)$

Câu 37. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (6)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (7)\\ &= O(1). && && (8) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n \log n)$
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(10n/11)$

Câu 40. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FibMergeSort(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FibMergeSort(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FibMergeSort(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      Merge(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
Merge(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m+1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j+1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else
          B[k] := A[j]; j := j+1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **318**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** D	**13.** B	**19.** A	**24.** C	**30.** D	**36.** D
02. B	**08.** D	**14.** D	**20.** D	**25.** B	**31.** B	**37.** D
03. A	**09.** B	**15.** C	**21.** A	**26.** B	**32.** B	**38.** A
04. B	**10.** D	**16.** B	**22.** C	**27.** C	**33.** C	**39.** A
05. A	**11.** B	**17.** C	**23.** D	**28.** A	**34.** A	**40.** B
06. B	**12.** B	**18.** C		**29.** D	**35.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **568**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 02. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 03. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(D) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$

Câu 05. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử x, y, và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \vee y \vee z$ (B) $x \oplus y \oplus z$ (C) $x \wedge y \wedge z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 07. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 08. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(B) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$

Câu 09. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 10. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $P(0, 3)$ (B) $\forall y \exists x\, P(x, y)$ (C) $\forall x \forall y\, P(x, y)$ (D) $\exists y\, P(4, y)$

Câu 11. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2x$ (B) $f(x) = 2^x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 13. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 14. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 100 (B) 101 (C) 103 (D) 102

Câu 15. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) 2

Câu 16. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (B) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (C) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (D) $n \cdot 2^{n+1} - 2$

Câu 18. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 75 (B) 80 (C) 73 (D) 78

Câu 19. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$ (B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$ (D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$

Câu 20. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\frac{10}{11}$ (C) $\frac{55}{11}$ (D) 5

Câu 21. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 22. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$ (B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$ (D) $P(15)$

Câu 23. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 24. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (11)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương

Câu 25. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 26. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{12}$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \tag{13}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (12) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 32. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

Ⓐ $y \cdot x^4$ Ⓑ $x \cdot y^4$ Ⓒ y^4 Ⓓ x^4

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

Ⓐ $f(n) = O(10n/11)$
Ⓑ Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
Ⓒ $f(n) = O(n \log n)$
Ⓓ $f(n) = O(n)$

Câu 34. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

Ⓐ 2^{n+1} là $O(2^n)$ Ⓑ 2^{2n} là $O(2^n)$
Ⓒ $\log n + 1$ là $O(\log n)$ Ⓓ $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 35. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

Ⓐ $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$ Ⓑ $T(n) = T(n/2) + O(1)$
Ⓒ $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ Ⓓ $T(n) = T(n/2) + O(n)$

Câu 36. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ−1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ (D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\omega(g(x))$

Câu 38. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 39. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(1)$ (B) $O(n\log n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 40. Hàm LogicalValue sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?
(A) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (B) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$ (D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **568**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** D	**19.** C	**25.** C	**31.** A	**37.** B
02. D	**08.** B	**14.** D	**20.** B	**26.** B	**32.** A	**38.** D
03. A	**09.** B	**15.** C	**21.** A	**27.** B	**33.** B	
04. B	**10.** D	**16.** B	**22.** B	**28.** D	**34.** B	**39.** D
05. A	**11.** C	**17.** B	**23.** D	**29.** C	**35.** C	
06. A	**12.** C	**18.** C	**24.** D	**30.** B	**36.** C	**40.** C

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **617**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \vee y$

Câu 02. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 04. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\ (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\ \text{isUpper}(x_j)$
(D) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$

Câu 05. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(B) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là đúng
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là sai

Câu 09. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 12. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 14. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) A là tập hữu hạn
(B) $B \subseteq A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai
(D) $A \subset A$

Câu 15. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 80 (B) 78 (C) 73 (D) 75

Câu 16. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 17. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?
(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$

Câu 18. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Câu 19. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 22. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(C) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?
(A) 18 (B) 22 (C) 14 (D) 26

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (1)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (2)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 13839606000 (C) 1386011925 (D) 1383960600

Câu 28. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 29. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
  i := i/2
  a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(n \log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 32. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 33. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n)$ (D) $O(1)$

Câu 34. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 35. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
    if n > 1
        m := f_{ℓ−1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$

Câu 36. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay $\diamondsuit$ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) $x \cdot y^4$ (B) y^4 (C) $y \cdot x^4$ (D) x^4

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 38. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (7)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= O(1). && && (9) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **617**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** C	**13.** A	**19.** B	**25.** D	**31.** D	**37.** A
02. B	**08.** D	**14.** C	**20.** C	**26.** C	**32.** C	**38.** D
03. B	**09.** D	**15.** C	**21.** D	**27.** C	**33.** C	
04. B	**10.** C	**16.** D	**22.** A	**28.** B	**34.** B	**39.** A
05. C	**11.** C	**17.** C	**23.** C	**29.** B	**35.** D	
06. B	**12.** B	**18.** B	**24.** D	**30.** B	**36.** C	**40.** D

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **818**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

Câu 02. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \wedge y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \vee y$ (D) $x \oplus y$

Câu 06. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\,((x \neq 0) \rightarrow \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\exists x\,((x \neq 0) \rightarrow \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \rightarrow \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \rightarrow \forall y\,(xy = 1))$

Câu 07. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 10. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0, 3)$ (B) $\forall y\,\exists x\,P(x, y)$ (C) $\forall x\,\forall y\,P(x, y)$ (D) $\exists y\,P(4, y)$

Câu 11. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = 3^n + 2^n$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = n + 3$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 13. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 75 (B) 73 (C) 78 (D) 80

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 15. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) 2

Câu 16. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 18. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{10}{11}$ (B) 10 (C) 5 (D) $\frac{55}{11}$

Câu 19. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$ (B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$ (D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$

Câu 20. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 21. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$ (B) $P(12)$
(C) $P(15)$ (D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1386011925 (C) 1383960500 (D) 1383960600

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) -2 (C) 1 (D) -4

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?
(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 29. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 32. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$
(B) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$
(C) $f(x)$ là $o(g(x))$
(D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 33. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{2n} là $O(2^n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 34. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) y^4
(B) x^4
(C) $y \cdot x^4$
(D) $x \cdot y^4$

Câu 35. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 36. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n\log n)$

Câu 37. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (10)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (11)\\ &= O(1). && && (12) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2\log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **818**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**12.** C	**18.** A	**24.** D	**30.** A	**36.** A
02. B	**08.** C	**13.** B	**19.** C	**25.** C	**31.** B	**37.** D
03. B	**09.** D	**14.** B	**20.** C	**26.** D	**32.** C	**38.** D
04. B	**10.** D	**15.** C	**21.** A	**27.** D	**33.** C	**39.** D
05. B	**11.** A	**16.** C	**22.** D	**28.** B	**34.** C	**40.** D
06. A		**17.** A	**23.** B	**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **781**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 02. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 03. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $\neg p \to q$ (C) $\neg q \to p$ (D) $q \to \neg p$

Câu 05. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$ (B) $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$ (C) $\exists y\, P(4,y)$ (D) $P(0,3)$

Câu 06. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\, \text{isUpper}(x_j)$

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$ (B) $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(C) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$ (B) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$ (D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 09. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$ (B) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$ (D) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 101 (B) 103 (C) 102 (D) 100

Câu 12. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$

Câu 13. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ (B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 14. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) -1
(B) 0
(C) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(D) 1

Câu 15. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (C) $f(x) = 4/x$ (D) $f(x) = 2x$

Câu 16. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?
(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 17. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 18. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$ (B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$ (D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 19. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3n$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?
(A) 1383960500 (B) 1383960600 (C) 13839606000 (D) 1386011925

Câu 22. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(C) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) Không thể tính được (B) -1 (C) 0 (D) -2

Câu 25. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\displaystyle\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1.$

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (4)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (2) và (3) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 26. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1
(B) -4
(C) -5
(D) -2

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$
(B) $f(n) = O(n^{2.58})$
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i(n/b^i)^d$ (B) $c(n/a^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

Câu 33. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$ (D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$

Câu 34. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) y^4 (B) x^4 (C) $y \cdot x^4$ (D) $x \cdot y^4$

Câu 35. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH$(A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x)$.

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 36. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
  for x in D do
      for y in D do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (B) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$ (D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 37. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(1)$

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 39. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 40. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **781**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**13.** D	**19.** C	**25.** B	**31.** B	**37.** B
02. A	**08.** D	**14.** A	**20.** C	**26.** B	**32.** A	**38.** A
03. A	**09.** A	**15.** B	**21.** D	**27.** D	**33.** B	
04. D	**10.** A	**16.** A	**22.** B	**28.** A	**34.** C	**39.** C
05. C	**11.** C	**17.** A	**23.** C	**29.** B	**35.** C	
06. C	**12.** A	**18.** C	**24.** A	**30.** C	**36.** B	**40.** C

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **145**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 02. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 03. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\ (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\ \text{isUpper}(x_j)$

Câu 04. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$$p = \text{“Tôi đi bơi.”}$$
$$q = \text{“Trời mưa.”}$$

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Tôi không đi bơi khi trời mưa.”

(A) $\neg p \to q$ (B) $\neg q \to p$ (C) $p \to q$ (D) $q \to \neg p$

Câu 06. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(D) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?
(A) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(B) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(D) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ “x là bạn của y”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn”.
(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 12. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{N}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{R}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 13. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$

Câu 14. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh (B) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh (D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 15. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \in \emptyset$

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{55}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{10}{11}$ (D) 5

Câu 17. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 18. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) -1
(D) 1

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ (D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) 1 (C) -2 (D) -5

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?
(A) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 25. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 26. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (10)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (11)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 29. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 32. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 33. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $2^n \log n + n$
(B) $23n \log\log n + 3n \log n$
(C) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(D) $5n + 17 \log n$

Câu 34. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 35. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(D) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, \frac{n^2}{1000000}, n \log n, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
   i := i + 1
if x^2 = a_i then
   return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(n^3)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n)$

Câu 37. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
   for j := 2 to m do
      a := a + 1
      b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m + n)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?
(A) $ca^i(n/b^i)^d$ (B) $ca^i n^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $c(n/a^i)^d$

Câu 40. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts := $A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
   if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
         ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
         for i := 1 to n do
               if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
                     return i
   ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
   k := ⌊√n⌋
   mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
   for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
         mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
   ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
   post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
   ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
   return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **145**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** C	**13.** D	**19.** D	**24.** D	**30.** B	**36.** D
02. D	**08.** A	**14.** C	**20.** C	**25.** B	**31.** A	**37.** B
03. A	**09.** C	**15.** D	**21.** A	**26.** A	**32.** C	**38.** A
04. C	**10.** A	**16.** C	**22.** A	**27.** B	**33.** B	**39.** A
05. D	**11.** D	**17.** A	**23.** D	**28.** D	**34.** B	**40.** A
06. C	**12.** C	**18.** C		**29.** A	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **598**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 02. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 04. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(B) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(C) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 06. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \leftrightarrow y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \oplus y$ (D) $x \vee y$

Câu 08. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0, 3)$ (B) $\exists y\, P(4, y)$ (C) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$ (D) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$

Câu 09. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là sai
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{Z}$ (B) $A = B = \mathbb{N}$ (C) $A = B = \mathbb{Q}$ (D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 12. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $B \subseteq A$
(C) A là tập hữu hạn
(D) $A \subset A$

Câu 13. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 14. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 15. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?
(A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 1
(C) -1
(D) 0

Câu 16. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 102 (B) 103 (C) 101 (D) 100

Câu 17. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 2

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = 3^n + 2^n$ (C) $a_n = n + 3$ (D) $a_n = 3n$

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 20. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = n^2$ (D) $a_n = 2n + 3$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n - 2$ và con ngựa thứ $n + 2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 22. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 23. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 24. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(C) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 25. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) Không thể tính được (B) 0 (C) -1 (D) -2

Câu 27. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.
(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng

Câu 28. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \tag{11}$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 29. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 31. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
  i := i/2
  a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 32. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (12)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (13)\\ &= O(1). && && (14) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

Câu 33. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m+1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j+1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else
          B[k] := A[j]; j := j+1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = T(n/2) + O(1)$

Câu 34. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^d)$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^{d+1})$

Câu 36. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(B) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(D) 2^{2n} là $O(2^n)$

Câu 37. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 38. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **598**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** A	**13.** C	**19.** D	**24.** D	**30.** B	**36.** D
02. B	**08.** B	**14.** A	**20.** D	**25.** C	**31.** D	**37.** B
03. B	**09.** A	**15.** C	**21.** A	**26.** A	**32.** C	**38.** D
04. D	**10.** A	**16.** A	**22.** A	**27.** C	**33.** A	**39.** A
05. C	**11.** D	**17.** D	**23.** D	**28.** A	**34.** A	**40.** B
06. D	**12.** A	**18.** A		**29.** A	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **790**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$ (B) $\neg q \to p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $p \to q$

Câu 02. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 03. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (C) $x \vee y \vee z$ (D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$

Câu 08. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 09. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$

Câu 12. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 14. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 4/x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = 2^x$ (D) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Câu 15. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và x chẵn$\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và $-4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $A \subset A$
(C) A là tập hữu hạn
(D) $B \subseteq A$

Câu 16. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 5 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 10 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 18. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Câu 21. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12), P(13), P(14)$

Câu 22. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 23. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(B) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(C) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(D) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 26 (B) 18 (C) 14 (D) 22

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1383960500 (C) 1383960600 (D) 1386011925

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -2 (D) -5

Câu 31. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (4) \\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (5) \\ &= O(1). && && (6) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 32. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$ (B) $O(\log n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 33. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$ (B) $O(y)$ (C) $O(x)$ (D) $O(1)$

Câu 34. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m + n)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(n)$

Câu 35. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{2n} là $O(2^n)$ (B) 2^{n+1} là $O(2^n)$

(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (D) $\log n + 1$ là $O(\log n)$

Câu 36. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $o(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^{d+1})$ (B) $O(n^d \log n)$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 38. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$ (B) $23n \log \log n + 3n \log n$

(C) $2^n \log n + n$ (D) $5n + 17 \log n$

Câu 39. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post} - 1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 40. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **790**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** B	**13.** A	**18.** D	**24.** A	**30.** B	**36.** B
02. A	**08.** D	**14.** D	**19.** B	**25.** D	**31.** C	**37.** B
03. C	**09.** A	**15.** A	**20.** D	**26.** B	**32.** B	**38.** B
04. A	**10.** A	**16.** B	**21.** A	**27.** D	**33.** D	**39.** D
05. C	**11.** A	**17.** D	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**40.** C
06. D	**12.** D		**23.** D	**29.** B	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **756**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$
(B) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$

Câu 03. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg p \to q$ (B) $p \to q$ (C) $q \to \neg p$ (D) $\neg q \to p$

Câu 04. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\exists y\,P(4, y)$ (B) $\forall y\,\exists x\,P(x, y)$ (C) $\forall x\,\forall y\,P(x, y)$ (D) $P(0, 3)$

Câu 05. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 06. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\dots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\dots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 07. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$

Câu 08. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$
(B) $x \vee y \vee z$
(C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(D) $x \wedge y \wedge z$

Câu 09. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(B) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(D) $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 10. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 11. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9,9,9,9,9,\dots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 12. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(C) $\emptyset = \{\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 13. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Z}$
(B) $A = B = \mathbb{R}$
(C) $A = B = \mathbb{Q}$
(D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 14. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 2

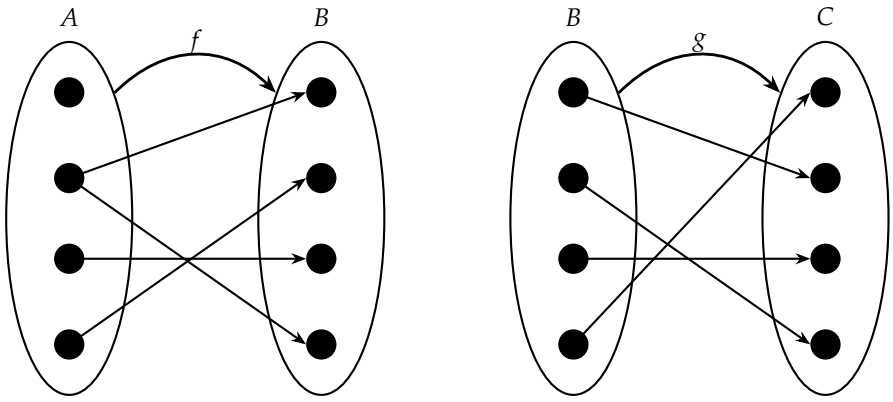
Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = 3^n + 2^n$ (C) $a_n = n + 3$ (D) $a_n = 3n$

Câu 19. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 78 (B) 73 (C) 75 (D) 80

Câu 20. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 21. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 22. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 23. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(D) $P(12)$

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 25. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.
(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ và $P(a+3, b+2)$ cũng đúng

Câu 26. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

Câu 27. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (8)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) 0 (B) -2 (C) Không thể tính được (D) -1

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (9)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (10)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (11) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (9) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?
(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n^2)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?
(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $ca^i n^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 34. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

Câu 36. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (12)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (13)\\ &= O(1). && && (14) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

Câu 37. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 38. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?
(A) $\forall x \in \mathcal{D} \; P(x)$
(B) $\exists x \in \mathcal{D} \, \forall y \in \mathcal{D} \; (P(x) \wedge P(y))$
(C) $\forall x \in \mathcal{D} \, \exists y \in \mathcal{D} \; (P(x) \vee P(y))$
(D) $\exists x \in \mathcal{D} \; P(x)$

Câu 39. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, \frac{n^2}{1000000}, n \log n, 2^n, 3^n, 2n!$

(B) $\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

(D) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **756**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**13.** B	**18.** A	**24.** D	**30.** A	**36.** B
02. C	**08.** B	**14.** A	**19.** B	**25.** D	**31.** A	**37.** B
03. C	**09.** A	**15.** D	**20.** A	**26.** B	**32.** A	**38.** D
04. A	**10.** B	**16.** D	**21.** B	**27.** A	**33.** B	**39.** C
05. A	**11.** C	**17.** D	**22.** B	**28.** A	**34.** B	**40.** D
06. C	**12.** D		**23.** C	**29.** C	**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **098**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 02. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 03. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg p \to q$ (B) $p \to q$ (C) $q \to \neg p$ (D) $\neg q \to p$

Câu 04. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(B) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$
(D) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 05. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là sai
(B) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai

Câu 06. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 07. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 08. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(B) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(D) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 09. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$
(B) $x \wedge y \wedge z$
(C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 2
(B) 4
(C) 3
(D) 1

Câu 12. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 4
(B) 2
(C) 1
(D) 3

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(B) $a_n = n + 3$
(C) $a_n = 3n$
(D) $a_n = 3^n + 2^n$

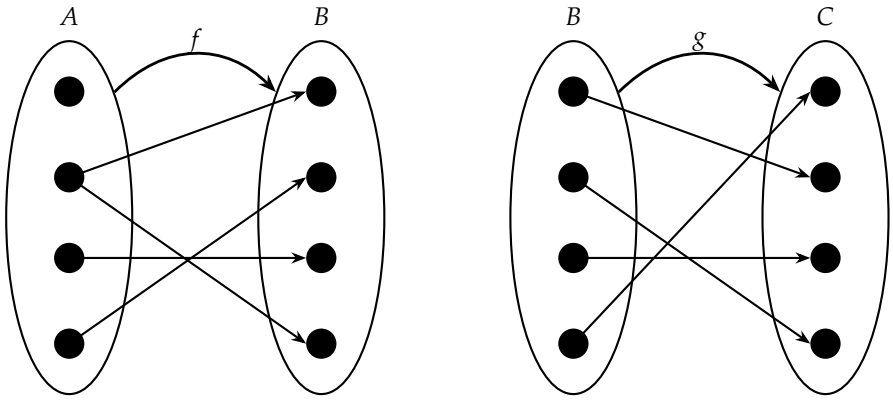
Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$
(B) $\emptyset \in \emptyset$
(C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 15. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$

Câu 18. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$
(B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$
(C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$
(D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 19. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 102
(B) 100
(C) 101
(D) 103

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 22. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(C) $P(12), P(13), P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000
(B) 1386011925
(C) 1383960500
(D) 1383960600

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được
(B) -1
(C) 0
(D) -2

Câu 25. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \tag{7}$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 26. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (8)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (9)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ và $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng

Câu 30. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 31. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{2n} là $O(2^n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 32. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n)$

Câu 33. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2 \log n)$ (D) $O(n^2)$

Câu 34. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (10)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (11)\\ &= O(1). && && (12) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 35. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4 (B) y^4 (C) $x \cdot y^4$ (D) $y \cdot x^4$

Câu 36. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m+n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(m \cdot n)$

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$ (D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \dfrac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \dfrac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \dfrac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \dfrac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **098**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** A	**13.** A	**19.** A	**25.** B	**31.** A	**36.** D
02. D	**08.** B	**14.** B	**20.** A	**26.** D	**32.** D	**37.** D
03. C	**09.** B	**15.** D	**21.** B	**27.** B	**33.** C	**38.** D
04. A	**10.** D	**16.** B	**22.** B	**28.** A	**34.** A	**39.** A
05. A	**11.** D	**17.** A	**23.** B	**29.** C	**35.** D	**40.** C
06. B	**12.** D	**18.** D	**24.** A	**30.** A		

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **706**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$ (B) $\neg q \to p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $p \to q$

Câu 02. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 03. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (C) $x \vee y \vee z$ (D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$

Câu 08. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 09. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$

Câu 12. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 14. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 4/x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = 2^x$ (D) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Câu 15. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và x chẵn$\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và $-4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $A \subset A$
(C) A là tập hữu hạn
(D) $B \subseteq A$

Câu 16. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 5 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 10 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 18. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Câu 21. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12), P(13), P(14)$

Câu 22. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 23. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(B) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(C) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(D) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 26 (B) 18 (C) 14 (D) 22

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1383960500 (C) 1383960600 (D) 1386011925

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -2 (D) -5

Câu 31. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (4) \\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (5) \\ &= O(1). && && (6) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 32. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$ (B) $O(\log n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 33. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$ (B) $O(y)$ (C) $O(x)$ (D) $O(1)$

Câu 34. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m + n)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(n)$

Câu 35. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{2n} là $O(2^n)$ (B) 2^{n+1} là $O(2^n)$

(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (D) $\log n + 1$ là $O(\log n)$

Câu 36. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $o(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^{d+1})$ (B) $O(n^d \log n)$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 38. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$ (B) $23n \log \log n + 3n \log n$

(C) $2^n \log n + n$ (D) $5n + 17 \log n$

Câu 39. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post} - 1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 40. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **706**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** B	**13.** A	**18.** D	**24.** A	**30.** B	**36.** B
02. A	**08.** D	**14.** D	**19.** B	**25.** D	**31.** C	**37.** B
03. C	**09.** A	**15.** A	**20.** D	**26.** B	**32.** B	**38.** B
04. A	**10.** A	**16.** B	**21.** A	**27.** D	**33.** D	**39.** D
05. C	**11.** A	**17.** D	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**40.** C
06. D	**12.** D		**23.** D	**29.** B	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **577**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow 2 &= 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow 1+2 &= 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow 3 &= 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 03. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 04. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 05. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg p \to q$ (B) $\neg q \to p$ (C) $p \to q$ (D) $q \to \neg p$

Câu 06. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(C) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(D) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$ (B) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(C) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x \forall y \exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x \exists y \forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$ (B) $\forall x \exists y \forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(C) $\exists x \forall y \exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$ (D) $\forall x \exists y \forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$

Câu 09. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{Z}$ (B) $A = B = \mathbb{N}$ (C) $A = B = \mathbb{Q}$ (D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 12. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 80 (B) 75 (C) 73 (D) 78

Câu 13. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$ (B) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$ (D) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$

Câu 14. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n+1)\cdot 2^n - 2$ (B) $(n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$ (C) $(n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $n\cdot 2^{n+1} - 2$

Câu 16. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 1
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 0
(D) -1

Câu 17. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\dfrac{55}{11}$ (B) 5 (C) $\dfrac{10}{11}$ (D) 10

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 22 (B) 14 (C) 18 (D) 26

Câu 22. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(C) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$

(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 26. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

(D) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

Câu 27. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

(B) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

(D) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) 1 (C) -2 (D) -5

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 31. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post $:=$ RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch$(A[(\text{post} - 1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x)$.

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 32. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 33. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2 \log n)$ (D) $O(n^2)$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/b^i)^d$ (B) $ca^i n^d$ (C) $ca^i(n/b^i)^d$ (D) $c(n/a^i)^d$

Câu 35. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4 (B) y^4 (C) $x \cdot y^4$ (D) $y \cdot x^4$

Câu 36. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
  i := i/2
  a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 37. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(1)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 40. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $2^n \log n + n$
(B) $23n \log \log n + 3n \log n$
(C) $5n + 17 \log n$
(D) $6n \log n + n^{1.1} + 2$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **577**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**13.** B	**19.** C	**25.** C	**31.** D	**37.** D
02. D	**08.** D	**14.** D	**20.** B	**26.** B	**32.** C	**38.** B
03. B	**09.** B	**15.** B	**21.** D	**27.** D	**33.** C	
04. B	**10.** C	**16.** D	**22.** B	**28.** A	**34.** C	**39.** C
05. D	**11.** D	**17.** A	**23.** C	**29.** B	**35.** D	
06. A	**12.** C	**18.** C	**24.** A	**30.** C	**36.** A	**40.** B

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **098**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $P(0, 3)$ (B) $\forall x \, \forall y \, P(x, y)$ (C) $\forall y \, \exists x \, P(x, y)$ (D) $\exists y \, P(4, y)$

Câu 02. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\} \, \text{isUpper}(x_j)$
(B) $\exists i \in \{1, \dots, n\} \, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\exists i \in \{1, \dots, n\} \, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$

Câu 03. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 04. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x \, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x \, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x \, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x \, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Peter nói thật và Alice nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 06. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 07. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 08. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

Câu 09. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$

Câu 10. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 11. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) $B \subseteq A$
(B) Cả ba phát biểu khác đều sai
(C) $A \subset A$
(D) A là tập hữu hạn

Câu 12. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 0
(C) -1
(D) 1

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = 2n + 3$ (C) $a_n = n^2$ (D) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (B) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (C) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 15. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) 2

Câu 16. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 17. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \in \emptyset$

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 20. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) 1 (C) -2 (D) -5

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(C) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -1 (B) -2 (C) 0 (D) Không thể tính được

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (10)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (11)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác

Câu 29. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (12)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (13)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (14)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (15)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (13) và (14) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (13) và (14) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m + n)$ (D) $O(n)$

Câu 32. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^{\log_4 2})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $ca^i n^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 34. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 35. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x)$ (B) $O(1)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(y)$

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n)$

Câu 37. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
    if n > 1
        m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(D) $T(n) = T(n/2) + O(1)$

Câu 38. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\omega(g(x))$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n^{2.32})$
(D) $f(n) = O(n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **098**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**06.** C	**12.** C	**18.** B	**24.** C	**30.** B	**36.** D
02. D	**07.** A	**13.** B	**19.** D	**25.** D	**31.** A	**37.** C
03. D	**08.** D	**14.** D	**20.** C	**26.** B	**32.** D	**38.** A
04. D	**09.** A	**15.** B	**21.** A	**27.** D	**33.** B	**39.** A
05. D	**10.** B	**16.** D	**22.** C	**28.** C	**34.** B	**40.** B
	11. B	**17.** D	**23.** C	**29.** C	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **980**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 02. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Chứng minh trên là sai

Câu 03. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

> $1 = 2$ (Điều phải chứng minh) (1)
> $\Leftrightarrow 2 = 1$ (Đối xứng) (2)
> $\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$ (Cộng theo vế (1) và (2)) (3)
> $\Leftrightarrow 3 = 3.$ (4)
>
> Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

$$\text{“Nếu } x \text{ và } y \text{ là các số thực thì } |x+y| \leq |x| + |y|\text{.”}$$

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?
(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Gọi $P(x,y)$ là vị từ “x chơi pickleball với y”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$

Câu 08. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ “x là bạn của y”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn”.
(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 09. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$$p = \text{“Tôi đi bơi.”}$$
$$q = \text{“Trời mưa.”}$$

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$ (B) $\neg p \to q$ (C) $\neg q \to p$ (D) $p \to q$

Câu 11. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 75 (B) 80 (C) 78 (D) 73

Câu 12. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 13. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Câu 14. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 15. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?
(A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 1
(C) -1
(D) 0

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{55}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{10}{11}$ (D) 5

Câu 17. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$

Câu 18. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset \in \emptyset$ (B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 19. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3n$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (7)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (8)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(D) $P(12)$

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5
(B) -2
(C) 1
(D) -4

Câu 25. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên* $n \in \mathbb{N}$, *ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực* a, b, c, d, *ta có* $a + b \geq c + d$ *khi và chỉ khi* $a \geq c$ *và* $b \geq d$.

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (11)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (12)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (10) và (11) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (10) và (11) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 26. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 27. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 29. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 13839606000 (D) 1386011925

Câu 31. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 32. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MergeSort(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MergeSort(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MergeSort(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      Merge(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
Merge(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?
(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $ca^i n^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 34. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log 3})$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 35. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^3)$

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(n^3)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n)$

Câu 37. Hàm SuperPower sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SuperPower(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SuperPower(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay $\diamondsuit$ bằng biểu thức nào để SuperPower(x, n) trả lại kết quả mong muốn?
(A) $y \cdot x^4$ (B) x^4 (C) $x \cdot y^4$ (D) y^4

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 39. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n\log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n^d \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025

——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **980**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**12.** A	**18.** A	**24.** D	**30.** D	**36.** D
02. D	**08.** A	**13.** A	**19.** C	**25.** B	**31.** D	**37.** A
03. A	**09.** B	**14.** D	**20.** C	**26.** A	**32.** B	**38.** A
04. B	**10.** A	**15.** C	**21.** B	**27.** A	**33.** B	**39.** C
05. B	**11.** D	**16.** C	**22.** D	**28.** A	**34.** A	**40.** D
06. D		**17.** D	**23.** C	**29.** A	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **617**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 02. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 03. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn
(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai

Câu 06. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow 2 &= 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow 1+2 &= 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow 3 &= 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 07. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 08. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói thật
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 09. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(B) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(C) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(D) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng

Câu 10. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$
(D) $\emptyset = \{\}$

Câu 12. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(C) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân

Câu 13. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$

Câu 14. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) A là tập hữu hạn
(B) $B \subseteq A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai
(D) $A \subset A$

Câu 15. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) 2

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3n$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 20. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\frac{10}{11}$ (C) $\frac{55}{11}$ (D) 5

Câu 21. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 22. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(C) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (10)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (8) và (9) là tương đương

(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (8) và (9) là tương đương

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 26. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500
(B) 13839606000
(C) 1386011925
(D) 1383960600

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1
(B) -4
(C) -5
(D) -2

Câu 30. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 31. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(10n/11)$
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{2n} là $O(2^n)$ (D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 34. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x,n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) y^4 (B) x^4 (C) $y \cdot x^4$ (D) $x \cdot y^4$

Câu 35. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  for j := 2 to m do
      a := a + 1
      b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m+n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m)$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 38. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 39. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n^3)$

Câu 40. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
    if n > 1
        m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$

(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **617**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** A	**13.** A	**18.** B	**24.** D	**30.** D	**36.** C
02. D	**08.** A	**14.** C	**19.** C	**25.** C	**31.** C	**37.** D
03. B	**09.** C	**15.** D	**20.** B	**26.** B	**32.** A	**38.** D
04. B	**10.** A	**16.** A	**21.** A	**27.** C	**33.** C	**39.** B
05. A	**11.** C	**17.** C	**22.** B	**28.** B	**34.** C	**40.** A
06. C	**12.** D		**23.** C	**29.** B	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **303**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\, \text{isUpper}(x_j)$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 04. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 05. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 06. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Chứng minh trên là đúng
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 07. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg q \to p$ (B) $\neg p \to q$ (C) $q \to \neg p$ (D) $p \to q$

Câu 08. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 09. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (C) $a_n = n^2$ (D) $a_n = 2n + 3$

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\dfrac{10}{11}$ (C) 5 (D) $\dfrac{55}{11}$

Câu 13. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 101 (B) 100 (C) 102 (D) 103

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (B) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (C) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 15. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng

Câu 16. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\{\}\}$ (B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$ (D) $\emptyset = \{\}$

Câu 17. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và x chẵn$\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và $-4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) A là tập hữu hạn (B) $A \subset A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai (D) $B \subseteq A$

Câu 18. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$ (B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$ (D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 19. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 22. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n - 2$ và con ngựa thứ $n + 2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(C) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 26 (B) 18 (C) 14 (D) 22

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) -4 (C) 1 (D) -5

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 1383960600 (C) 13839606000 (D) 1386011925

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \tag{13}$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (11) và (12) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (11) và (12) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) $f(n) = O(n \log n)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(10n/11)$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?
(A) $ca^i(n/b^i)^d$ (B) $c(n/a^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

Câu 33. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts := $A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?
(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 34. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FibMergeSort sau của thuật toán MergeSort để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FibMergeSort được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FibMergeSort(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ−1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FibMergeSort(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FibMergeSort(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      Merge(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
Merge(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ (D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 35. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$

Câu 36. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $o(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 38. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x)$ (B) $O(y)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(1)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 40. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **303**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** C	**13.** C	**19.** D	**25.** B	**31.** B	**37.** A
02. D	**08.** D	**14.** D	**20.** A	**26.** B	**32.** A	**38.** D
03. B	**09.** B	**15.** B	**21.** C	**27.** A	**33.** A	**39.** A
04. D	**10.** C	**16.** A	**22.** C	**28.** D	**34.** C	**40.** A
05. A	**11.** D	**17.** C	**23.** C	**29.** A	**35.** A	
06. C	**12.** B	**18.** C	**24.** A	**30.** B	**36.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **603**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $P(0, 3)$ (B) $\forall x \, \forall y \, P(x, y)$ (C) $\forall y \, \exists x \, P(x, y)$ (D) $\exists y \, P(4, y)$

Câu 02. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\} \, \text{isUpper}(x_j)$
(B) $\exists i \in \{1, \dots, n\} \, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\exists i \in \{1, \dots, n\} \, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$

Câu 03. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 04. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x \, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x \, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x \, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x \, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Peter nói thật và Alice nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 06. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 07. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 08. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

Câu 09. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$

Câu 10. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 11. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) $B \subseteq A$
(B) Cả ba phát biểu khác đều sai
(C) $A \subset A$
(D) A là tập hữu hạn

Câu 12. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 0
(C) -1
(D) 1

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = 2n + 3$ (C) $a_n = n^2$ (D) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (B) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (C) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 15. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) 2

Câu 16. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 17. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \in \emptyset$

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 20. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) 1 (C) -2 (D) -5

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(C) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -1 (B) -2 (C) 0 (D) Không thể tính được

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (10)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (11)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác

Câu 29. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (12)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (13)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (14)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (15)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (13) và (14) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (13) và (14) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m + n)$ (D) $O(n)$

Câu 32. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^{\log_4 2})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $ca^i n^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 34. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 35. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x)$ (B) $O(1)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(y)$

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n)$

Câu 37. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
    if n > 1
        m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(D) $T(n) = T(n/2) + O(1)$

Câu 38. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\omega(g(x))$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n^{2.32})$
(D) $f(n) = O(n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **603**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**06.** C	**12.** C	**18.** B	**24.** C	**30.** B	**36.** D
02. D	**07.** A	**13.** B	**19.** D	**25.** D	**31.** A	**37.** C
03. D	**08.** D	**14.** D	**20.** C	**26.** B	**32.** D	**38.** A
04. D	**09.** A	**15.** B	**21.** A	**27.** D	**33.** B	**39.** A
05. D	**10.** B	**16.** D	**22.** C	**28.** C	**34.** B	**40.** B
	11. B	**17.** D	**23.** C	**29.** C	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **409**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y=xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0,3)$ (B) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (C) $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$ (D) $\exists y\,P(4,y)$

Câu 02. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy=1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x\neq 0)\to\forall y\,(xy=1))$ (B) $\exists x\,((x\neq 0)\to\exists y\,(xy=1))$
(C) $\forall x\,((x\neq 0)\to\exists y\,(xy=1))$ (D) $\forall x\,((x\neq 0)\to\forall y\,(xy=1))$

Câu 03. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 04. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x\in\mathbb{R}\,(\neg P(x)\wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng (B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai (D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai

Câu 05. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x+y=0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p,q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p\to q)\to p)\to q$ luôn đúng
(B) Với mọi mệnh đề p,q, mệnh đề $(p\vee q)\vee(p\to q)$ luôn đúng
(C) $\forall x\in\mathbb{N}\exists y\in\mathbb{N}\,(x<y)\not\equiv\exists y\in\mathbb{N}\forall x\in\mathbb{N}\,(x<y)$
(D) Cho $P(n)$ là vị từ $1+2+\cdots+n+(n+1)=n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n\in\mathbb{N}\,P(n)\to P(n+1)$ luôn đúng

Câu 07. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n\in\mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$ (B) $n+3=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$
(C) $n+3=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$ (D) $n+4=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y|\leq|x|+|y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)=$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)=$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)=$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x=x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i\in\{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i)\wedge\neg\text{isLower}(x_i)\wedge\neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i\in\{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i)\wedge\text{isLower}(x_i)\wedge\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i\in\{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i)\vee\text{isLower}(x_i)\vee\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i\in\{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i)\vee\text{isLower}(x_i))\wedge\exists j\in\{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 10. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1=2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1=2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2=1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1+2=2+1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3=3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 11. Cho quan hệ $f\subseteq A\times B$ định nghĩa bởi $f=\{(n,\sqrt{n})\mid n\in A\wedge\sqrt{n}\in B\}$ trong đó A,B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A=B=\mathbb{Z}$ (B) $A=B=\mathbb{N}$ (C) $A=B=\mathbb{Q}$ (D) $A=B=\mathbb{R}$

Câu 12. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n=9,9,9,9,9,\ldots$ $(n\geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(C) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân

Câu 13. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A,B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$ (B) $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A\cap B)\subseteq\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$ (D) $\mathcal{P}(A\cup B)\subseteq\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 15. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(B) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(D) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$

Câu 16. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = n^2$
(B) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$
(C) $a_n = 2^n$
(D) $a_n = 2n + 3$

Câu 17. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và x chẵn$\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và $-4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) A là tập hữu hạn
(B) $A \subset A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai
(D) $B \subseteq A$

Câu 18. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 2
(B) 4
(C) 1
(D) 3

Câu 19. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 1
(B) -1
(C) 0
(D) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4
(B) 2
(C) 3
(D) 1

Câu 21. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 22. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n - 2$ và con ngựa thứ $n + 2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 23. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(B) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 24. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(B) $P(15)$
(C) $P(12)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?
(A) -2 (B) -4 (C) 1 (D) -5

Câu 26. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?
(A) 22 (B) 18 (C) 26 (D) 14

Câu 28. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên* $n \in \mathbb{N}$, *ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực* a, b, c, d, *ta có* $a + b \geq c + d$ *khi và chỉ khi* $a \geq c$ *và* $b \geq d$.

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (8)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 29. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{9}$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \tag{10}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (9) không chính xác

Câu 31. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+\ P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$T(k+1) = T(k) + O(1) \quad \text{(Giả thiết)} \tag{11}$$
$$= O(1) + O(1) \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{12}$$
$$= O(1). \tag{13}$$

  Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 32. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) 2^{2n} là $O(2^n)$

Câu 33. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

Ⓐ $x \cdot y^4$ Ⓑ $y \cdot x^4$ Ⓒ x^4 Ⓓ y^4

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

Ⓐ $O(n^d)$ Ⓑ $O(n^d \log n)$ Ⓒ $O(n^{d+1})$ Ⓓ $O(n \log n)$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

Ⓐ $ca^i n^d$ Ⓑ $c(n/b^i)^d$ Ⓒ $c(n/a^i)^d$ Ⓓ $ca^i(n/b^i)^d$

Câu 36. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH$(A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x)$.

```
ROOTSEARCH(A[1 . . . n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 . . . min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

Ⓐ $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ Ⓑ $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
Ⓒ $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ Ⓓ $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 37. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(D) $T(n) = T(n/2) + O(1)$

Câu 38. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n\log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^{2.32})$
(D) $f(n) = O(n^5)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^2)$
(B) $f(n) = O(n^{2.58})$
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n\log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **409**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** B	**13.** D	**19.** B	**24.** D	**30.** C	**36.** A
02. C	**08.** C	**14.** D	**20.** D	**25.** B	**31.** C	**37.** C
03. D	**09.** A	**15.** C	**21.** D	**26.** B	**32.** D	**38.** D
04. B	**10.** B	**16.** D	**22.** B	**27.** C	**33.** B	**39.** A
05. D	**11.** D	**17.** C	**23.** D	**28.** A	**34.** B	**40.** B
06. A	**12.** D	**18.** A		**29.** A	**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **092**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\, \text{isUpper}(x_j)$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 04. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 05. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 06. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Chứng minh trên là đúng
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 07. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg q \to p$ (B) $\neg p \to q$ (C) $q \to \neg p$ (D) $p \to q$

Câu 08. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 09. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (C) $a_n = n^2$ (D) $a_n = 2n + 3$

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\dfrac{10}{11}$ (C) 5 (D) $\dfrac{55}{11}$

Câu 13. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 101 (B) 100 (C) 102 (D) 103

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (B) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (C) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 15. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng

Câu 16. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\{\}\}$ (B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$ (D) $\emptyset = \{\}$

Câu 17. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và x chẵn$\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và $-4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) A là tập hữu hạn (B) $A \subset A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai (D) $B \subseteq A$

Câu 18. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$ (B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$ (D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 19. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 22. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n - 2$ và con ngựa thứ $n + 2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(C) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 26 (B) 18 (C) 14 (D) 22

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) -4 (C) 1 (D) -5

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 1383960600 (C) 13839606000 (D) 1386011925

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\displaystyle\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1.$

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (11)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (12)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (13)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (11) và (12) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (11) và (12) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) $f(n) = O(n \log n)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(10n/11)$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?
(A) $ca^i(n/b^i)^d$ (B) $c(n/a^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

Câu 33. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts := $A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?
(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 34. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FibMergeSort sau của thuật toán MergeSort để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FibMergeSort được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FibMergeSort(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FibMergeSort(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FibMergeSort(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      Merge(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
Merge(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ (D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 35. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$

Câu 36. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $o(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 38. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x)$ (B) $O(y)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(1)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 40. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **092**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** C	**13.** C	**19.** D	**25.** B	**31.** B	**37.** A
02. D	**08.** D	**14.** D	**20.** A	**26.** B	**32.** A	**38.** D
03. B	**09.** B	**15.** B	**21.** C	**27.** A	**33.** A	
04. D	**10.** C	**16.** A	**22.** C	**28.** D	**34.** C	**39.** A
05. A	**11.** D	**17.** C	**23.** C	**29.** A	**35.** A	
06. C	**12.** B	**18.** C	**24.** A	**30.** B	**36.** B	**40.** A

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **687**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 03. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\ \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\ \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\ \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\ \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều

ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \vee y \vee z$ (B) $x \oplus y \oplus z$ (C) $x \wedge y \wedge z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 07. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng

Câu 08. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$ (B) $x \vee y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \wedge y$

Câu 09. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3^n + 2^n$ (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (C) $a_n = n + 3$ (D) $a_n = 3n$

Câu 13. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$

Câu 14. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

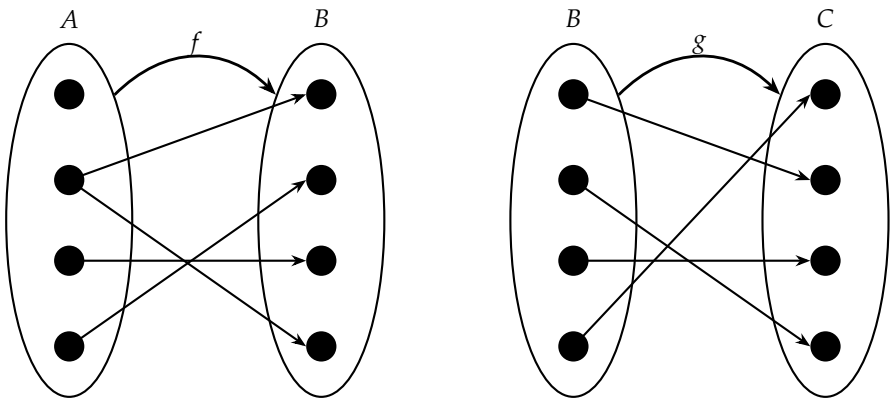
Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 80 (B) 75 (C) 78 (D) 73

Câu 21. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 22. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương

Câu 23. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(B) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) -4 (C) 1 (D) -5

Câu 26. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác

Câu 28. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (10)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (11)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?
(A) 1383960600
(B) 1383960500
(C) 13839606000
(D) 1386011925

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^2 \log n)$
(B) $O(n^{\log 3})$
(C) $O(n^2)$
(D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(10n/11)$
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n)$ (D) $O(1)$

Câu 34. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $c(n/b^i)^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $ca^i(n/b^i)^d$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n\log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Hàm nào sau đây là $\Theta(n\log n)$?

(A) $6n\log n + n^{1.1} + 2$
(B) $23n\log\log n + 3n\log n$
(C) $2^n\log n + n$
(D) $5n + 17\log n$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^{d+1})$ (B) $O(n^d \log n)$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 40. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025

——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **687**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**13.** B	**19.** B	**24.** D	**30.** D	**36.** C
02. B	**08.** C	**14.** A	**20.** D	**25.** B	**31.** C	**37.** D
03. A	**09.** A	**15.** A	**21.** A	**26.** B	**32.** A	**38.** B
04. D	**10.** A	**16.** A	**22.** B	**27.** D	**33.** C	**39.** B
05. B	**11.** C	**17.** C	**23.** D	**28.** B	**34.** A	**40.** A
06. A	**12.** B	**18.** B		**29.** D	**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **900**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y=xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $P(0,3)$ (B) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (C) $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$ (D) $\exists y\,P(4,y)$

Câu 02. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg q \to p$ (B) $q \to \neg p$ (C) $p \to q$ (D) $\neg p \to q$

Câu 03. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\forall x \in \mathbb{N}\exists y \in \mathbb{N}\,(x<y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N}\forall x \in \mathbb{N}\,(x<y)$
(B) Với mọi mệnh đề p,q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p\to q)\to p)\to q$ luôn đúng
(C) Với mọi mệnh đề p,q, mệnh đề $(p\vee q)\vee(p\to q)$ luôn đúng
(D) Cho $P(n)$ là vị từ $1+2+\cdots+n+(n+1)=n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n\in\mathbb{N}\,P(n)\to P(n+1)$ luôn đúng

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 05. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $\forall x\,(P(x)\wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x))\wedge(\forall x\,Q(x))$ (B) $\forall x\,(P(x)\vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x))\vee(\forall x\,Q(x))$
(C) $\forall x\,(P(x)\vee Q(x))\to(\forall x\,P(x))\vee(\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $(\forall x\,P(x))\vee(\forall x\,Q(x))\to\forall x\,(P(x)\vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 06. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy=1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\,((x\neq 0)\to\exists y\,(xy=1))$ (B) $\exists x\,((x\neq 0)\to\exists y\,(xy=1))$
(C) $\forall x\,((x\neq 0)\to\forall y\,(xy=1))$ (D) $\exists x\,((x\neq 0)\to\forall y\,(xy=1))$

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (B) $x \wedge y \wedge z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 08. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \wedge y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \vee y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 10. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 11. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 75 (B) 80 (C) 78 (D) 73

Câu 12. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

Câu 13. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (B) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n+1) \cdot 2^n - 2$

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 5 (B) $\frac{10}{11}$ (C) 10 (D) $\frac{55}{11}$

Câu 15. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (B) $a_n = n^2$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = 2^n$

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) -1
(B) 1
(C) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(D) 0

Câu 18. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \emptyset$ (B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Câu 21. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 22. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$

- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1+n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a,b,c,d, ta có $a+b \geq c+d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1+n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1+0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1+k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1+(k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \tag{10}$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (8) và (9) là tương đương

(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (8) và (9) là tương đương
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (11) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (12) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (13) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (11) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (12) không chính xác

Câu 26. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) -2 (C) -5 (D) 1

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (14)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (15)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (14) không chính xác

Câu 31. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 32. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
  for x in D do
      for y in D do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?
(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 34. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(n)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(\log n)$

Câu 35. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?
(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(B) $5n + 17 \log n$
(C) $2^n \log n + n$
(D) $23n \log \log n + 3n \log n$

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$

Câu 38. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(1)$

Câu 39. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (16)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (17)\\ &= O(1). && && (18) \end{aligned}$$

  Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **900**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** D	**12.** D	**18.** A	**24.** C	**30.** C	**36.** D
02. B	**08.** D	**13.** C	**19.** B	**25.** C	**31.** D	**37.** A
03. B	**09.** D	**14.** B	**20.** B	**26.** B	**32.** C	**38.** A
04. C	**10.** B	**15.** C	**21.** B	**27.** A	**33.** B	**39.** C
05. C	**11.** D	**16.** B	**22.** C	**28.** A	**34.** D	**40.** B
06. A		**17.** A	**23.** C	**29.** B	**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **960**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 02. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x+y=0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1=2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1=2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2=1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1+2=2+1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3=3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 04. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy=1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy=1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy=1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy=1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy=1))$

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 06. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z \, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z \, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z \, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z \, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 07. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 08. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0, 3)$
(B) $\exists y \, P(4, y)$
(C) $\forall x \, \forall y \, P(x, y)$
(D) $\forall y \, \exists x \, P(x, y)$

Câu 09. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 10. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$
(B) $\neg p \to q$
(C) $\neg q \to p$
(D) $p \to q$

Câu 11. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$
(B) Cả ba phát biểu khác đều sai
(C) $A \subset A$
(D) A là tập hữu hạn

Câu 12. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 80
(B) 75
(C) 73
(D) 78

Câu 13. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 101 (B) 100 (C) 102 (D) 103

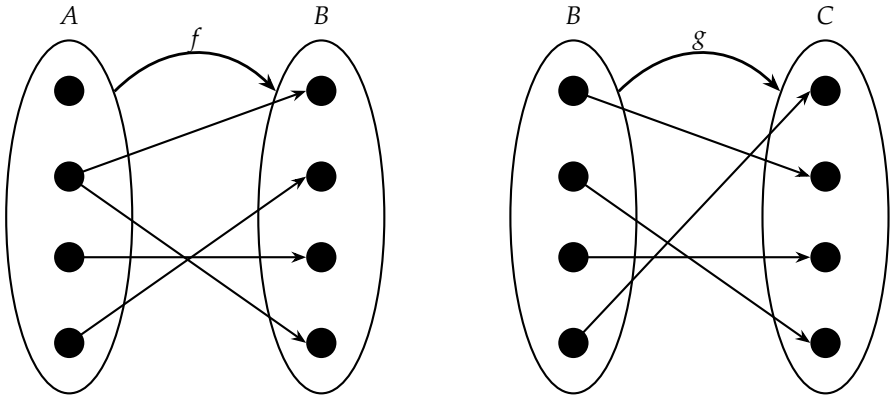
Câu 14. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$

Câu 15. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (C) $f(x) = 4/x$ (D) $f(x) = 2x$

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh (B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh (D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2n + 3$ (B) $a_n = n^2$ (C) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (D) $a_n = 2^n$

Câu 18. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(C) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 22. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 23. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(D) $P(12)$

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

Câu 25. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?
(A) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$

Câu 26. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a+b \geq c+d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1+n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1+0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1+k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1+(k+1))-1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (8)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 13839606000 (C) 1386011925 (D) 1383960600

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 31. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (9)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (10)\\ &= O(1). && && (11) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 32. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^{\log_3 2})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$

(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

(C) $f(n) = O(n \log n)$

(D) $f(n) = O(n)$

Câu 34. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(1)$ (B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 35. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) 2^{2n} là $O(2^n)$ (B) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (D) $\log n + 1$ là $O(\log n)$

Câu 36. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?
(A) $x \cdot y^4$ (B) y^4 (C) $y \cdot x^4$ (D) x^4

Câu 37. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
  i := i + 1
if x^2 = a_i then
  return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(n^2)$ (B) $O(n)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(1)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) $f(n) = O(n \log n)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 40. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **960**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** C	**19.** B	**25.** C	**31.** C	**37.** B
02. B	**08.** B	**14.** C	**20.** B	**26.** D	**32.** C	**38.** B
03. A	**09.** B	**15.** B	**21.** A	**27.** C	**33.** B	**39.** B
04. A	**10.** A	**16.** B	**22.** B	**28.** A	**34.** D	**40.** A
05. A	**11.** B	**17.** A	**23.** C	**29.** A	**35.** A	
06. C	**12.** C	**18.** C	**24.** C	**30.** D	**36.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **335**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(B) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$
(C) $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(D) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 02. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg q \to p$ (B) $q \to \neg p$ (C) $p \to q$ (D) $\neg p \to q$

Câu 03. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(B) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(D) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 04. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\, \text{isUpper}(x_j)$
(C) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$

Câu 06. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$ (B) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$ (D) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 07. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall x \, \forall y \, P(x,y)$ (B) $\forall y \, \exists x \, P(x,y)$ (C) $P(0,3)$ (D) $\exists y \, P(4,y)$

Câu 08. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R} \, (\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai (B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai (D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng

Câu 09. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$ (B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$ (D) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$

Câu 10. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 11. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 12. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = 4/x$ (D) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Câu 13. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Câu 14. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$

Câu 15. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{j}{j+1}\right)$$

(A) $\frac{55}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{10}{11}$ (D) 5

Câu 17. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 73 (B) 78 (C) 80 (D) 75

Câu 18. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ (B) $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ (C) $n\cdot 2^{n+1}-2$ (D) $(n+1)\cdot 2^n-2$

Câu 20. Cho các tập hợp $A = \{a,b,c,d\}$ và $B = \{1,2,3,4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a,3),(b,4),(c,2),(d,2)\}$
(B) $f = \{(a,3),(b,4),(c,2),(d,1)\}$
(C) $f = \{(a,3),(b,3),(c,3),(d,3)\}$
(D) $f = \{(a,3),(b,4),(c,3),(d,4)\}$

Câu 21. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1+n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên* $n \in \mathbb{N}$, *ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực* a, b, c, d, *ta có* $a + b \geq c + d$ *khi và chỉ khi* $a \geq c$ *và* $b \geq d$.

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (4)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (2) và (3) là tương đương
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1386011925 (C) 1383960500 (D) 1383960600

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 25. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (8)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (9)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) 0 (B) -2 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 33. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1\ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$

(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$ (D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$

Câu 34. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $o(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 35. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
  for x in D do
      for y in D do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(B) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(n^d)$ (C) $O(n^{d+1})$ (D) $O(n^d \log n)$

Câu 37. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m + n)$

Câu 38. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(B) $23n \log \log n + 3n \log n$
(C) $2^n \log n + n$
(D) $5n + 17 \log n$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **335**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** D	**12.** D	**18.** A	**24.** D	**30.** D	**36.** D
02. B	**08.** D	**13.** C	**19.** A	**25.** B	**31.** C	**37.** B
03. B	**09.** A	**14.** C	**20.** B	**26.** D	**32.** C	**38.** B
04. C	**10.** B	**15.** B	**21.** A	**27.** B	**33.** B	**39.** B
05. A	**11.** D	**16.** C	**22.** A	**28.** B	**34.** A	**40.** D
06. C		**17.** A	**23.** B	**29.** A	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **548**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\dots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(C) $\exists i \in \{1,\dots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$

Câu 02. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (B) $P(0,3)$ (C) $\exists y\,P(4,y)$ (D) $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$

Câu 03. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là đúng
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \le |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(B) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(D) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 07. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng

Câu 08. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 09. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\, (\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$
(B) $x \wedge y$
(C) $x \leftrightarrow y$
(D) $x \vee y$

Câu 11. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 12. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(C) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân

Câu 13. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 75
(B) 73
(C) 78
(D) 80

Câu 14. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

Câu 15. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 103 (B) 102 (C) 100 (D) 101

Câu 16. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$

Câu 17. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$

Câu 18. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) -1
(D) 1

Câu 19. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\{\}\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 22. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 23. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(B) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(C) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(D) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp

Câu 24. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(B) $P(15)$
(C) $P(12)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 18
(B) 22
(C) 14
(D) 26

Câu 26. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (1)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (2) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)) && (3)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (4)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (5) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (3) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^{d+1})$
(B) $O(n \log n)$
(C) $O(n^d)$
(D) $O(n^d \log n)$

Câu 33. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
  for y := 0 to 5 do
      x := x - 1
      y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$
(B) $O(y)$
(C) $O(x)$
(D) $O(1)$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n^{2.58})$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 35. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$ (B) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (D) $T(n) = T(n/2) + O(n)$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) $f(n) = O(n)$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 37. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(\log n)$ (D) $O(n)$

Câu 38. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\omega(g(x))$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FibMergeSort(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ−1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FibMergeSort(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FibMergeSort(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      Merge(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
Merge(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) 2^{2n} là $O(2^n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **548**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**12.** D	**18.** C	**24.** D	**30.** B	**36.** C
02. C	**08.** D	**13.** B	**19.** A	**25.** D	**31.** D	**37.** C
03. C	**09.** A	**14.** A	**20.** B	**26.** B	**32.** D	**38.** A
04. B	**10.** C	**15.** B	**21.** A	**27.** D	**33.** D	**39.** A
05. B	**11.** D	**16.** B	**22.** C	**28.** C	**34.** C	**40.** D
06. A		**17.** D	**23.** D	**29.** A	**35.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **105**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$
(B) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$

Câu 03. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$ (B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$

Câu 08. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0,3)$ (B) $\exists y\, P(4,y)$ (C) $\forall x \forall y\, P(x,y)$ (D) $\forall y \exists x\, P(x,y)$

Câu 09. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 10. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p,q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p,q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng

Câu 11. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9,9,9,9,9,\ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n+1)\cdot 2^n - 2$ (B) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (C) $(n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 13. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$ (B) A là tập hữu hạn
(C) $A \subset A$ (D) Cả ba phát biểu khác đều sai

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 16. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 78 (B) 80 (C) 75 (D) 73

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2n + 3$ (B) $a_n = n^2$ (C) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (D) $a_n = 2^n$

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(B) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(C) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) 0 (B) -2 (C) Không thể tính được (D) -1

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên* $n \in \mathbb{N}$, *ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực* a, b, c, d, *ta có* $a + b \geq c + d$ *khi và chỉ khi* $a \geq c$ *và* $b \geq d$.

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$P(k+1) = 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} \quad \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} \tag{7}$$
$$= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{8}$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \tag{9}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{10}$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \tag{11}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác

Câu 26. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

Câu 27. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 14 (B) 22 (C) 26 (D) 18

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -2 (D) -5

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $ca^i (n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $c(n/a^i)^d$

Câu 32. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^{\log_3 2})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 33. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m \cdot n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 34. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (12)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (13)\\ &= O(1). && && (14) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (B) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$ (D) 2^{2n} là $O(2^n)$

Câu 37. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), 𝒟):
    for x in 𝒟 do
        for y in 𝒟 do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i-1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 39. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$
(B) $O(n \log n)$
(C) $O(n)$
(D) $O(\log n)$

Câu 40. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **105**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** D	**18.** B	**24.** C	**30.** B	**36.** D
02. C	**08.** B	**14.** B	**19.** B	**25.** A	**31.** B	**37.** D
03. C	**09.** A	**15.** D	**20.** C	**26.** D	**32.** C	**38.** C
04. B	**10.** D	**16.** D	**21.** B	**27.** C	**33.** C	**39.** D
05. A	**11.** C	**17.** A	**22.** C	**28.** A	**34.** A	**40.** D
06. D	**12.** D		**23.** C	**29.** C	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **608**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$

Câu 02. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}))$

Câu 03. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là sai
(B) Chứng minh trên là đúng
(C) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 04. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3$
(B) $1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$
(C) $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3$
(D) $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3$

Câu 05. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$ (B) $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$ (C) $\exists y\, P(4,y)$ (D) $P(0,3)$

Câu 06. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (B) $x \wedge y \wedge z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 08. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(D) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$

Câu 09. Cho p và q là các mệnh đề sau:

p = "Tôi đi bơi."
q = "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 101 (B) 103 (C) 102 (D) 100

Câu 12. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 13. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$

Câu 14. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2n + 3$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (D) $a_n = n^2$

Câu 15. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Câu 16. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = n + 3$ (B) $a_n = 3n$ (C) $a_n = 3^n + 2^n$ (D) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Câu 19. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân

Câu 20. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $B \subseteq A$
(C) $A \subset A$
(D) A là tập hữu hạn

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 1383960600 (C) 13839606000 (D) 1386011925

Câu 22. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(C) $P(12), P(13), P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 23. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác

Câu 24. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

Câu 25. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (7)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 26 (B) 14 (C) 18 (D) 22

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) 0 (B) -2 (C) Không thể tính được (D) -1

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 31. Giả sử $A[1 \dots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \dots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \dots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 32. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
  for y := 0 to 5 do
      x := x - 1
      y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x \cdot y)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x)$

Câu 33. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $O(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$
(B) $f(n) = O(n \log n)$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(10n/11)$

Câu 35. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$ (B) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (D) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, \frac{n^2}{1000000}, n \log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 40. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **608**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**13.** D	**18.** D	**24.** C	**30.** B	**36.** C
02. B	**08.** D	**14.** A	**19.** A	**25.** B	**31.** D	**37.** A
03. A	**09.** B	**15.** A	**20.** A	**26.** A	**32.** C	**38.** D
04. B	**10.** A	**16.** D	**21.** D	**27.** D	**33.** D	**39.** C
05. C	**11.** C	**17.** D	**22.** B	**28.** A	**34.** C	**40.** D
06. B	**12.** B		**23.** D	**29.** C	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **139**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 03. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$
(B) $\exists y\, P(4, y)$
(C) $P(0, 3)$
(D) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$
(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \oplus Q(x, z))$
(C) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$ (B) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$

(C) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 09. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (B) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối (B) Cả Alice và Peter đều nói dối

(C) Peter nói thật và Alice nói dối (D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$ (B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

(C) $\emptyset = \{\{\}\}$ (D) $\emptyset = \{\}$

Câu 12. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(C) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 13. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 14. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{N}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 15. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$ (B) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$ (D) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$

Câu 16. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$

Câu 17. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$

Câu 18. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 75 (B) 80 (C) 73 (D) 78

Câu 19. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3n$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 22. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".
Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1+n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a,b,c,d, ta có $a+b \geq c+d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1+n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1+0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1+k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1+(k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (7)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) -2 (C) 1 (D) -4

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1383960500 (C) 1383960600 (D) 1386011925

Câu 26. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 27. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 32. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 34. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $o(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 35. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post $:=$ ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 36. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (8)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (9)\\ &= O(1). && && (10) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n \log n)$
(C) $f(n) = O(10n/11)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 39. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x \cdot y)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m + n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **139**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** D	**13.** B	**19.** C	**25.** D	**30.** B	**36.** B
02. D	**08.** C	**14.** A	**20.** A	**26.** D	**31.** A	**37.** A
03. B	**09.** A	**15.** C	**21.** B	**27.** A	**32.** A	**38.** B
04. B	**10.** A	**16.** B	**22.** C	**28.** D	**33.** B	**39.** C
05. D	**11.** C	**17.** D	**23.** C	**29.** A	**34.** A	**40.** D
06. B	**12.** C	**18.** C	**24.** D		**35.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **611**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\dots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(C) $\exists i \in \{1,\dots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$

Câu 02. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(B) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$

Câu 04. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói thật
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 05. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 06. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x+y=0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 07. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 08. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là đúng
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là sai

Câu 09. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$
(B) $P(0,3)$
(C) $\exists y\, P(4,y)$
(D) $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$

Câu 10. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3$
(B) $1 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1$
(C) $1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 3$
(D) $1 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 3$

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2
(B) 4
(C) 3
(D) 1

Câu 12. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{N}$
(B) $A = B = \mathbb{Z}$
(C) $A = B = \mathbb{R}$
(D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 13. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 101 (B) 100 (C) 102 (D) 103

Câu 14. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 73 (B) 75 (C) 80 (D) 78

Câu 15. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$

Câu 16. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\{\}\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(D) $\emptyset = \{\}$

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 5 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 10 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 18. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2x$ (B) $f(x) = 2^x$ (C) $f(x) = 4/x$ (D) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Câu 19. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?
(A) 1
(B) -1
(C) 0
(D) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng

Câu 20. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 21. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 22. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?
(A) 1386011925
(B) 13839606000
(C) 1383960600
(D) 1383960500

Câu 25. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?
(A) -4
(B) 1
(C) -2
(D) -5

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (11)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n^{2.32})$
(D) $f(n) = O(n^5)$

Câu 32. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m)$ (B) $O(n)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(m \cdot n)$

Câu 33. Giả sử $A[1 \dots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \dots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \dots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 34. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $o(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 35. Hàm SuperPower sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SuperPower(x, n):
  if n = 1 then
      return x²
  y := SuperPower(x, n-1)
  return ◇
```

Cần thay ◇ bằng biểu thức nào để SuperPower(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4 (B) y^4 (C) $x \cdot y^4$ (D) $y \cdot x^4$

Câu 36. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (B) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$ (D) 2^{2n} là $O(2^n)$

Câu 37. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
   i := i + 1
if x^2 = a_i then
   return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

Ⓐ $O(n^2)$ Ⓑ $O(n)$ Ⓒ $O(n^3)$ Ⓓ $O(1)$

Câu 38. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
   i := i/2
   a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

Ⓐ $O(n \log n)$ Ⓑ $O(1)$ Ⓒ $O(\log n)$ Ⓓ $O(n)$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

Ⓐ $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ Ⓑ $f(x)$ là $O(g(x))$ Ⓒ $f(x)$ là $\omega(g(x))$ Ⓓ $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (12)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (13)\\ &= O(1). && && (14) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ⓐ Không có gì sai trong chứng minh này
Ⓑ Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
Ⓒ Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
Ⓓ Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **611**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** C	**13.** C	**18.** D	**24.** A	**30.** B	**36.** D
02. D	**08.** D	**14.** A	**19.** B	**25.** B	**31.** B	**37.** B
03. B	**09.** C	**15.** D	**20.** D	**26.** D	**32.** D	**38.** C
04. D	**10.** B	**16.** A	**21.** B	**27.** D	**33.** A	**39.** B
05. A	**11.** C	**17.** D	**22.** A	**28.** A	**34.** A	**40.** C
06. B	**12.** C		**23.** D	**29.** A	**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **876**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 03. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\ \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\ \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\ \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\ \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều

ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \vee y \vee z$ (B) $x \oplus y \oplus z$ (C) $x \wedge y \wedge z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 07. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng

Câu 08. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$ (B) $x \vee y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \wedge y$

Câu 09. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3^n + 2^n$ (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (C) $a_n = n + 3$ (D) $a_n = 3n$

Câu 13. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$

Câu 14. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

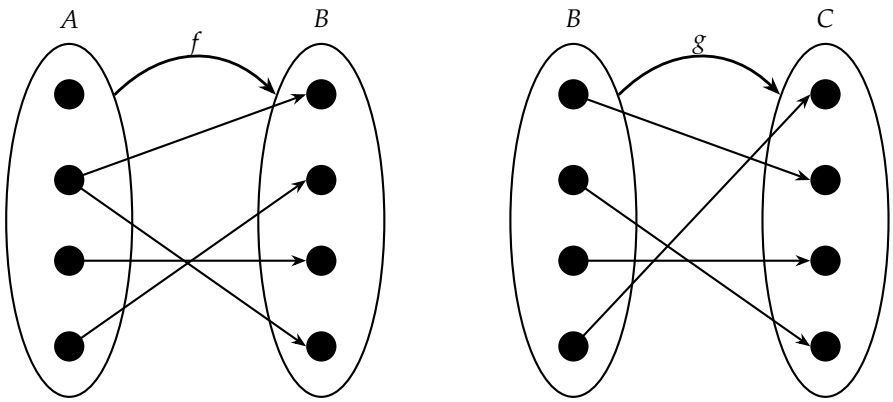
Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 80 (B) 75 (C) 78 (D) 73

Câu 21. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 22. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương

Câu 23. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(B) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) -4 (C) 1 (D) -5

Câu 26. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác

Câu 28. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (10)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (11)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?
(A) 1383960600
(B) 1383960500
(C) 13839606000
(D) 1386011925

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^2 \log n)$
(B) $O(n^{\log 3})$
(C) $O(n^2)$
(D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(10n/11)$
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n)$ (D) $O(1)$

Câu 34. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $c(n/b^i)^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $ca^i(n/b^i)^d$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n\log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Hàm LogicalValue sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Hàm nào sau đây là $\Theta(n\log n)$?

(A) $6n\log n + n^{1.1} + 2$
(B) $23n\log\log n + 3n\log n$
(C) $2^n\log n + n$
(D) $5n + 17\log n$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^{d+1})$ (B) $O(n^d \log n)$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 40. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **876**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**13.** B	**19.** B	**24.** D	**30.** D	**36.** C
02. B	**08.** C	**14.** A	**20.** D	**25.** B	**31.** C	**37.** D
03. A	**09.** A	**15.** A	**21.** A	**26.** B	**32.** A	**38.** B
04. D	**10.** A	**16.** A	**22.** B	**27.** D	**33.** C	**39.** B
05. B	**11.** C	**17.** C	**23.** D	**28.** B	**34.** A	**40.** A
06. A	**12.** B	**18.** B		**29.** D	**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **938**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 02. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$ (B) $P(0,3)$ (C) $\exists y\, P(4,y)$ (D) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$

Câu 03. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x+y=0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Chứng minh trên là đúng
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai

Câu 05. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(D) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

Câu 06. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói thật
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói dối
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 07. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\dots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(B) $\exists i \in \{1,\dots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 09. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 10. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 11. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 1
(D) -1

Câu 12. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \dots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$

Câu 13. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$
(B) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$
(C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$
(D) $(n+1) \cdot 2^n - 2$

Câu 14. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{R}$
(B) $A = B = \mathbb{Z}$
(C) $A = B = \mathbb{N}$
(D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 15. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4
(B) 3
(C) 1
(D) 2

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 100
(B) 102
(C) 103
(D) 101

Câu 18. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 2
(B) 4
(C) 1
(D) 3

Câu 19. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\{\}\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 18 (B) 26 (C) 22 (D) 14

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{10}$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \tag{11}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác

Câu 26. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a+b \geq c+d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1+n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1+0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1+k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (12)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1+(k+1))-1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (13)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (14)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (15)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (13) và (14) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (13) và (14) là tương đương

Câu 27. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a+5b$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2-4x+5 > 0$

Câu 28. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12), P(13), P(14)$

Câu 29. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a+4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -2 (D) -5

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $ca^i (n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $c(n/a^i)^d$

Câu 32. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) 2^{2n} là $O(2^n)$

Câu 33. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m \cdot n)$ (D) $O(m + n)$

Câu 34. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FibMergeSort(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FibMergeSort(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FibMergeSort(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      Merge(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
Merge(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 35. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(B) $5n + 17 \log n$
(C) $2^n \log n + n$
(D) $23n \log \log n + 3n \log n$

Câu 36. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$
(B) $f(x)$ là $O(g(x))$
(C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$
(D) $f(x)$ là $\omega(g(x))$

Câu 38. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n} \log n, 1000 \log n, n \log n, \dfrac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, \dfrac{n^2}{1000000}, n \log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \dfrac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(D) $1000 \log n, \sqrt{n} \log n, n \log n, \dfrac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 39. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor \sqrt{n} \rfloor], A[2 \lfloor \sqrt{n} \rfloor], A[3 \lfloor \sqrt{n} \rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH($A[(\text{post} - 1) \lfloor \sqrt{n} \rfloor, \ldots, \text{post} \lfloor \sqrt{n} \rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n^d)$ (D) $O(n^d \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **938**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** C	**19.** A	**25.** A	**30.** B	**36.** A
02. C	**08.** C	**14.** A	**20.** A	**26.** D	**31.** B	**37.** B
03. C	**09.** A	**15.** C	**21.** A	**27.** D	**32.** D	**38.** D
04. B	**10.** B	**16.** B	**22.** A	**28.** A	**33.** C	**39.** D
05. A	**11.** D	**17.** B	**23.** B	**29.** A	**34.** C	**40.** D
06. B	**12.** A	**18.** A	**24.** C		**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **532**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 02. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x+y=0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1=2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1=2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2=1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1+2=2+1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3=3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 04. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy=1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy=1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy=1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy=1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy=1))$

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 06. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z \, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z \, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z \, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z \, (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 07. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 08. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0, 3)$
(B) $\exists y \, P(4, y)$
(C) $\forall x \, \forall y \, P(x, y)$
(D) $\forall y \, \exists x \, P(x, y)$

Câu 09. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 10. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$
(B) $\neg p \to q$
(C) $\neg q \to p$
(D) $p \to q$

Câu 11. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$
(B) Cả ba phát biểu khác đều sai
(C) $A \subset A$
(D) A là tập hữu hạn

Câu 12. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 80
(B) 75
(C) 73
(D) 78

Câu 13. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 101 (B) 100 (C) 102 (D) 103

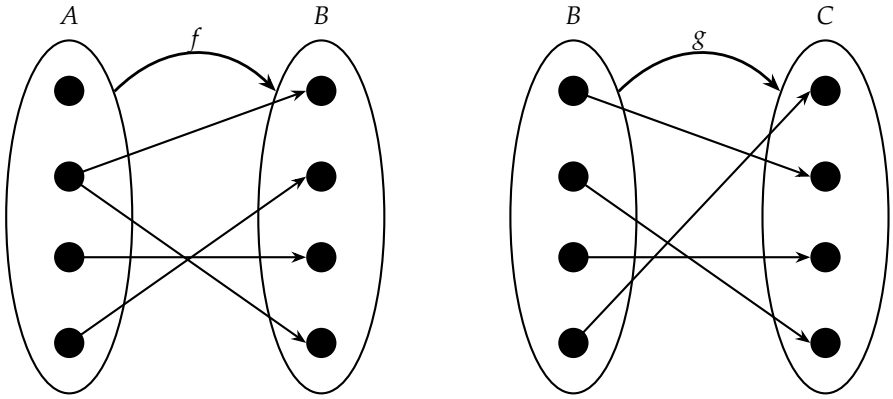
Câu 14. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$

Câu 15. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (C) $f(x) = 4/x$ (D) $f(x) = 2x$

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh (B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh (D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2n + 3$ (B) $a_n = n^2$ (C) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (D) $a_n = 2^n$

Câu 18. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(C) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 22. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 23. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(D) $P(12)$

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

Câu 25. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?
(A) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$

Câu 26. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a+b \geq c+d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1+n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1+0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1+k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1+(k+1))-1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (8)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 13839606000 (C) 1386011925 (D) 1383960600

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 31. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (9)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (10)\\ &= O(1). && && (11) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 32. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^{\log_3 2})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$

(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

(C) $f(n) = O(n \log n)$

(D) $f(n) = O(n)$

Câu 34. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(1)$ (B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 35. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) 2^{2n} là $O(2^n)$ (B) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (D) $\log n + 1$ là $O(\log n)$

Câu 36. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?
(A) $x \cdot y^4$ (B) y^4 (C) $y \cdot x^4$ (D) x^4

Câu 37. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
  i := i + 1
if x^2 = a_i then
  return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(n^2)$ (B) $O(n)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(1)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) $f(n) = O(n \log n)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 40. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **532**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** C	**19.** B	**25.** C	**31.** C	**37.** B
02. B	**08.** B	**14.** C	**20.** B	**26.** D	**32.** C	**38.** B
03. A	**09.** B	**15.** B	**21.** A	**27.** C	**33.** B	**39.** B
04. A	**10.** A	**16.** B	**22.** B	**28.** A	**34.** D	**40.** A
05. A	**11.** B	**17.** A	**23.** C	**29.** A	**35.** A	
06. C	**12.** C	**18.** C	**24.** C	**30.** D	**36.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **812**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 02. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 03. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$ (B) $\exists y\, P(4, y)$ (C) $P(0, 3)$ (D) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$

Câu 04. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói thật
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (C) $x \vee y \vee z$ (D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 07. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\, \text{isUpper}(x_j)$
(B) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$ (B) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$ (D) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \vee y$

Câu 11. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 12. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{N}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{R}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 13. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$
(B) A là tập hữu hạn
(C) $A \subset A$
(D) Cả ba phát biểu khác đều sai

Câu 14. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 15. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 80
(B) 78
(C) 73
(D) 75

Câu 16. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?
(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 1
(B) 3
(C) 4
(D) 2

Câu 18. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2x$
(B) $f(x) = 2^x$
(C) $f(x) = 4/x$
(D) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Câu 19. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
(B) $\emptyset \subseteq \emptyset$
(C) $\emptyset \in \emptyset$
(D) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Câu 20. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?
(A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 0
(C) 1
(D) -1

Câu 21. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.
(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 22. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) -5 (C) -4 (D) 1

Câu 24. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (1) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (2) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 25. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$ (B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$ (D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$ (B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ (D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

Câu 27. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) 0 (B) -2 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 31. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 32. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n^d \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 34. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (7)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= O(1). && && (9) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 35. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$ (B) $5n + 17 \log n$
(C) $2^n \log n + n$ (D) $23n \log \log n + 3n \log n$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Giả sử $A[1 \dots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \dots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \dots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 39. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n + 1$ là $O(\log n)$ (B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$ (D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 40. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
  for x in D do
      for y in D do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$

(B) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$

(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

(D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **812**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** B	**13.** D	**19.** C	**25.** B	**31.** A	**37.** C
02. D	**08.** C	**14.** A	**20.** D	**26.** B	**32.** C	**38.** A
03. B	**09.** C	**15.** C	**21.** D	**27.** A	**33.** C	
04. D	**10.** C	**16.** B	**22.** A	**28.** A	**34.** A	**39.** B
05. C	**11.** D	**17.** A	**23.** C	**29.** B	**35.** D	
06. B	**12.** C	**18.** D	**24.** B	**30.** D	**36.** C	**40.** C

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **375**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y=xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $P(0,3)$ (B) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (C) $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$ (D) $\exists y\,P(4,y)$

Câu 02. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y>x$" là:

> Lấy $x=6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y=7>6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Chứng minh trên là sai

Câu 03. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)=$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)=$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)=$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x=x_1x_2\dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\exists i\in\{1,\dots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i)\wedge\neg\text{isLower}(x_i)\wedge\neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i\in\{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i)\vee\text{isLower}(x_i)\vee\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i\in\{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i)\wedge\text{isLower}(x_i)\wedge\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i\in\{1,\dots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i)\vee\text{isLower}(x_i))\wedge\exists j\in\{1,\dots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 05. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Peter nói thật và Alice nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 08. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \oplus y \oplus z$ (C) $x \vee y \vee z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 10. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

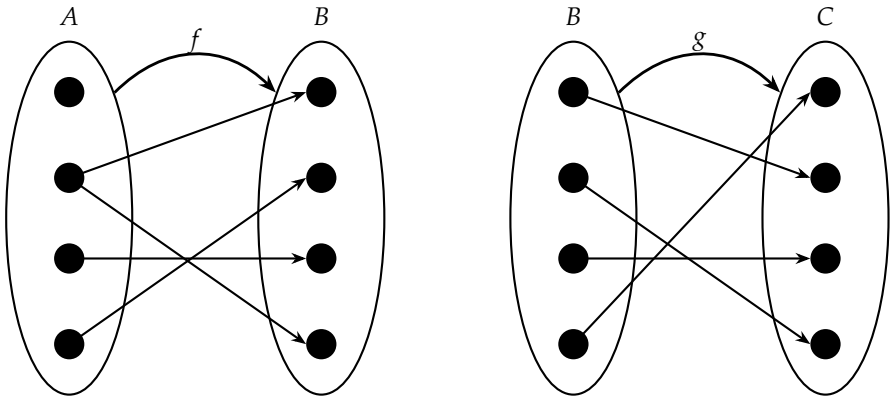
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 12. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?



Hình 1: Các quan hệ f và g.

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$

Câu 13. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Câu 14. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{N}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 15. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng

Câu 18. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 19. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 78 (B) 73 (C) 75 (D) 80

Câu 20. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?
(A) 22 (B) 14 (C) 18 (D) 26

Câu 22. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ (B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$ (D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} \quad (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) Không thể tính được (B) -1 (C) 0 (D) -2

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?
(A) 13839606000 (B) 1383960500 (C) 1383960600 (D) 1386011925

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (1)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (2)$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 27. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 28. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 29. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?

(A) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(D) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n^5)$
(C) $f(n) = O(n^{2.32})$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 33. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{2n} là $O(2^n)$ (D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 34. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
   i := i + 1
if x^2 = a_i then
   return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(1)$ (B) $O(n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^3)$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?
(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^d)$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^{d+1})$

Câu 36. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
   i := i/2
   a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(\log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 37. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
   if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
         ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
         for i := 1 to n do
               if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
                     return i
   ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
   k := ⌊√n⌋
   mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
   for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
         mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
   ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
   post := RootSearch(mileposts, x)
   ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
   return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 39. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 40. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?
(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **375**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** B	**13.** B	**19.** B	**24.** A	**30.** B	**36.** A
02. D	**08.** A	**14.** A	**20.** D	**25.** D	**31.** C	**37.** C
03. A	**09.** C	**15.** D	**21.** D	**26.** C	**32.** A	**38.** A
04. C	**10.** A	**16.** A	**22.** A	**27.** A	**33.** C	**39.** D
05. D	**11.** B	**17.** B	**23.** D	**28.** D	**34.** B	**40.** D
06. D	**12.** A	**18.** D		**29.** A	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **230**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \vee y$

Câu 02. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 04. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\ (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\ \text{isUpper}(x_j)$
(D) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\ (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$

Câu 05. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(B) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$
(B) $q \to \neg p$
(C) $\neg p \to q$
(D) $\neg q \to p$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là đúng
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là sai

Câu 09. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 12. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 14. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) A là tập hữu hạn
(B) $B \subseteq A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai
(D) $A \subset A$

Câu 15. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 80 (B) 78 (C) 73 (D) 75

Câu 16. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 17. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?
(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$

Câu 18. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Câu 19. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 22. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(C) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?
(A) 18 (B) 22 (C) 14 (D) 26

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (1)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (2)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 13839606000 (C) 1386011925 (D) 1383960600

Câu 28. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 29. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
  i := i/2
  a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(n \log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 32. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 33. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n)$ (D) $O(1)$

Câu 34. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 35. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
    if n > 1
        m := f_{ℓ−1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$

Câu 36. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay $\diamondsuit$ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) $x \cdot y^4$ (B) y^4 (C) $y \cdot x^4$ (D) x^4

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 38. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (7)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= O(1). && && (9) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **230**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** C	**13.** A	**19.** B	**25.** D	**31.** D	**37.** A
02. B	**08.** D	**14.** C	**20.** C	**26.** C	**32.** C	**38.** D
03. B	**09.** D	**15.** C	**21.** D	**27.** C	**33.** C	
04. B	**10.** C	**16.** D	**22.** A	**28.** B	**34.** B	**39.** A
05. C	**11.** C	**17.** C	**23.** C	**29.** B	**35.** D	
06. B	**12.** B	**18.** B	**24.** D	**30.** B	**36.** C	**40.** D

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **988**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$ (B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (C) $x \wedge y \wedge z$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 02. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$ (B) $\exists y\, P(4,y)$ (C) $P(0,3)$ (D) $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$

Câu 04. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 05. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$ (B) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$ (D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 06. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 07. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 08. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn
(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng

Câu 09. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Chứng minh trên là sai
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 10. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 11. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2x$
(B) $f(x) = 2^x$
(C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$
(D) $f(x) = 4/x$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3^n + 2^n$
(B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(C) $a_n = n + 3$
(D) $a_n = 3n$

Câu 13. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 2
(B) 1
(C) 3
(D) 4

Câu 14. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?
(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 17. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(D) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

Câu 18. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?
(A) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$

Câu 19. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\{\}\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 20. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 4
(B) 2
(C) 3
(D) 1

Câu 21. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) 0
(B) -2
(C) Không thể tính được
(D) -1

Câu 23. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(D) $P(12)$

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1386011925 (B) 13839606000 (C) 1383960600 (D) 1383960500

Câu 25. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) 1 (C) -2 (D) -4

Câu 27. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^{\log_4 2})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n \log n)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 34. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(\log n)$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $c(n/b^i)^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $ca^i(n/b^i)^d$

Câu 36. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m+n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(m \cdot n)$

Câu 37. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
    if n > 1
        m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$

Câu 38. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) 2^{2n} là $O(2^n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 39. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?
(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$

Câu 40. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(n^3)$
(B) $O(n^2)$
(C) $O(1)$
(D) $O(n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **988**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** B	**13.** B	**19.** A	**25.** C	**31.** C	**36.** D
02. A	**08.** D	**14.** A	**20.** B	**26.** D	**32.** D	**37.** A
03. B	**09.** A	**15.** A	**21.** A	**27.** A	**33.** B	**38.** A
04. A	**10.** B	**16.** A	**22.** C	**28.** B	**34.** D	**39.** C
05. A	**11.** C	**17.** A	**23.** C	**29.** B	**35.** D	**40.** D
06. C	**12.** B	**18.** B	**24.** A	**30.** B		

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **898**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 02. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 03. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg p \to q$ (B) $p \to q$ (C) $q \to \neg p$ (D) $\neg q \to p$

Câu 04. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(B) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$
(D) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 05. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là sai
(B) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai

Câu 06. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 07. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 08. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(B) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(D) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 09. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$
(B) $x \wedge y \wedge z$
(C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 2
(B) 4
(C) 3
(D) 1

Câu 12. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 4
(B) 2
(C) 1
(D) 3

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(B) $a_n = n + 3$
(C) $a_n = 3n$
(D) $a_n = 3^n + 2^n$

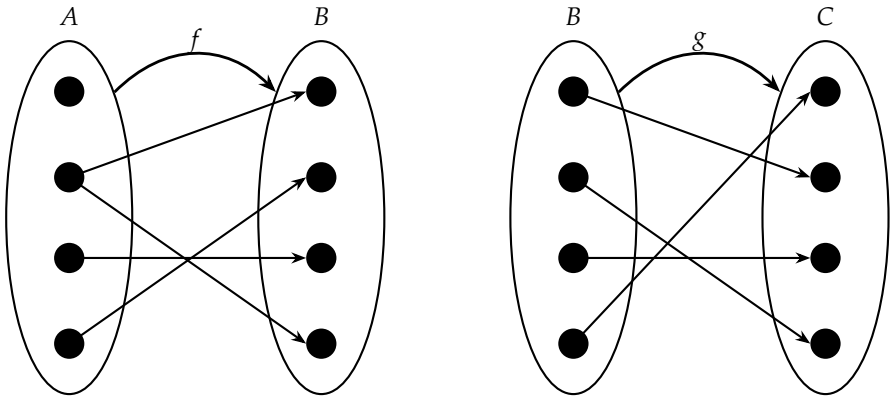
Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$
(B) $\emptyset \in \emptyset$
(C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 15. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$

Câu 18. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$
(B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$
(C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$
(D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 19. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 102
(B) 100
(C) 101
(D) 103

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 22. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(C) $P(12), P(13), P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000
(B) 1386011925
(C) 1383960500
(D) 1383960600

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} \quad (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được
(B) -1
(C) 0
(D) -2

Câu 25. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \tag{7}$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 26. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{8}$$
$$= 2^{k+2} - 1. \qquad \text{(Biến đổi đại số)} \tag{9}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ và $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng

Câu 30. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 31. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{2n} là $O(2^n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 32. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n)$

Câu 33. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2 \log n)$ (D) $O(n^2)$

Câu 34. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (10)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (11)\\ &= O(1). && && (12) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(B) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 35. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4 (B) y^4 (C) $x \cdot y^4$ (D) $y \cdot x^4$

Câu 36. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m+n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(m \cdot n)$

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$ (D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \dfrac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \dfrac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \dfrac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \dfrac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **898**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** A	**13.** A	**19.** A	**25.** B	**31.** A	**36.** D
02. D	**08.** B	**14.** B	**20.** A	**26.** D	**32.** D	**37.** D
03. C	**09.** B	**15.** D	**21.** B	**27.** B	**33.** C	**38.** D
04. A	**10.** D	**16.** B	**22.** B	**28.** A	**34.** A	**39.** A
05. A	**11.** D	**17.** A	**23.** B	**29.** C	**35.** D	**40.** C
06. B	**12.** D	**18.** D	**24.** A	**30.** A		

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **108**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ 2 &= 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ 1+2 &= 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ 3 &= 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 03. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói thật
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 04. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$

Câu 05. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y\,\exists x\,P(x, y)$ (B) $\forall x\,\forall y\,P(x, y)$ (C) $\exists y\,P(4, y)$ (D) $P(0, 3)$

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 08. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \oplus y \oplus z$ (C) $x \vee y \vee z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 10. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ (B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ (D) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 11. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 1
(D) -1

Câu 12. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100}\prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 103 (B) 101 (C) 100 (D) 102

Câu 13. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C-(B\cup A)=(C-B)-A$ (B) $A-(B\cup C)=(B-C)-A$
(C) $C-(B\cup A)=(C-A)-B$ (D) $A-(B\cup C)=(A-C)-B$

Câu 14. Cho $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B=\{x \mid x\in\mathbb{Z} \text{ và } -4<x<17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) A là tập hữu hạn (B) $B\subseteq A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai (D) $A\subset A$

Câu 15. Cho các tập hợp $A=\{a,b,c,d\}$ và $B=\{1,2,3,4\}$. Quan hệ $f\subseteq A\times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f=\{(a,3),(b,4),(c,2),(d,2)\}$ (B) $f=\{(a,3),(b,3),(c,3),(d,3)\}$
(C) $f=\{(a,3),(b,4),(c,3),(d,4)\}$ (D) $f=\{(a,3),(b,4),(c,2),(d,1)\}$

Câu 16. Cho các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x<y$ thì $f(x)<f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(C) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10}\left(\prod_{j=1}^{i}\frac{j}{j+1}\right)$$

(A) 5 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 10 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n\geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n=3\cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n=3^n+2^n$ (C) $a_n=n+3$ (D) $a_n=3n$

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A,B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A\cap B)\subseteq\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$ (B) $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$ (D) $\mathcal{P}(A\cup B)\subseteq\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+2=0\}$ (B) $\emptyset=\{x\in\mathbb{Z} \mid 2x=3\}$
(C) $\emptyset=\{\{\}\}$ (D) $\emptyset=\{\}$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n=6a_{n-1}-9a_{n-2} & (n>2)\\ a_1=0, a_2=9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n\leq n$ (B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n\leq 3\cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n\leq 2\cdot 3^n$ (D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n\leq 5\cdot 2^n$

Câu 22. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{5}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \tag{8}$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1386011925 (B) 13839606000 (C) 1383960600 (D) 1383960500

Câu 25. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) 1 (C) -2 (D) -4

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 22 (B) 18 (C) 26 (D) 14

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (9)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (10)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (9) không chính xác

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(n)$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n^2)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(B) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 34. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 35. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^{\log 3})$

Câu 36. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FibMergeSort sau của thuật toán MergeSort để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FibMergeSort được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FibMergeSort(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FibMergeSort(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FibMergeSort(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      Merge(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
Merge(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m+1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j+1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else
          B[k] := A[j]; j := j+1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ (D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

Câu 37. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x)$ (C) $O(x \cdot y)$ (D) $O(1)$

Câu 38. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{2n} là $O(2^n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **108**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** A	**13.** B	**18.** A	**24.** A	**30.** B	**36.** C
02. D	**08.** A	**14.** C	**19.** D	**25.** C	**31.** A	**37.** D
03. C	**09.** C	**15.** D	**20.** C	**26.** D	**32.** A	**38.** A
04. A	**10.** B	**16.** D	**21.** B	**27.** C	**33.** D	**39.** B
05. C	**11.** D	**17.** D	**22.** A	**28.** C	**34.** D	**40.** B
06. D	**12.** D		**23.** C	**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **200**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \land P(x, z) \land (x = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x, y) \land P(x, z) \land (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \land P(x, z) \land (y = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x, y) \land P(x, z) \land (y \neq z))$

Câu 03. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \land \neg\text{isLower}(x_i) \land \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \lor \text{isLower}(x_i) \lor \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \land \text{isLower}(x_i) \land \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \lor \text{isLower}(x_i)) \land \exists j \in \{1, \dots, n\}\, \text{isUpper}(x_j)$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 06. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \leftrightarrow y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \oplus y$ (D) $x \vee y$

Câu 08. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 09. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(B) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

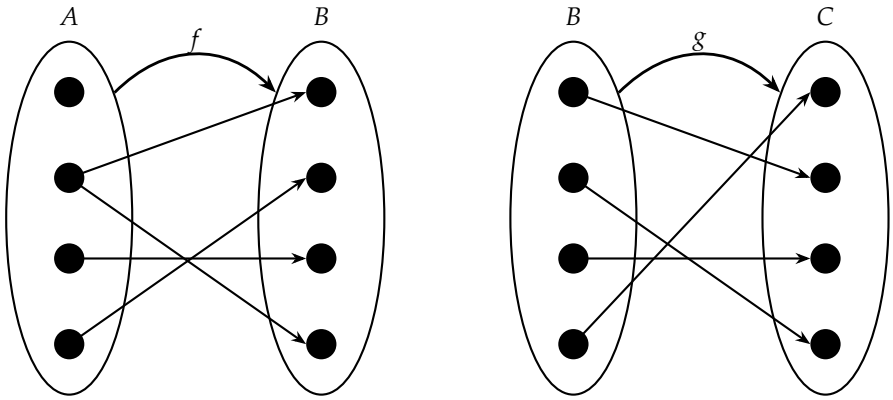
$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 3 (D) 1

Câu 12. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Câu 13. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 5 (B) $\frac{10}{11}$ (C) 10 (D) $\frac{55}{11}$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (B) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $n \cdot 2^{n+1} - 2$

Câu 16. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 1
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 0
(D) -1

Câu 17. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$

Câu 18. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$
(B) Cả ba phát biểu khác đều sai
(C) A là tập hữu hạn
(D) $A \subset A$

Câu 19. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$

Câu 20. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3^n + 2^n$ (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = n + 3$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) -1 (C) 0 (D) -2

Câu 25. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 26. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$ (B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3, a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3, a_1 = 7$

Câu 27. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4 (B) $y \cdot x^4$ (C) y^4 (D) $x \cdot y^4$

Câu 32. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
  i := i + 1
if x^2 = a_i then
  return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n)$

Câu 33. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 34. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m+n)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(n)$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

Câu 36. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i-1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **200**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** A	**13.** D	**19.** C	**25.** B	**31.** B	**37.** A
02. D	**08.** B	**14.** B	**20.** B	**26.** B	**32.** D	**38.** A
03. A	**09.** C	**15.** B	**21.** C	**27.** D	**33.** D	
04. C	**10.** A	**16.** D	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**39.** A
05. A	**11.** C	**17.** A	**23.** B	**29.** C	**35.** D	
06. C	**12.** A	**18.** B	**24.** A	**30.** B	**36.** A	**40.** B

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **344**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 02. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 03. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai

Câu 06. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow 2 &= 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow 1+2 &= 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow 3 &= 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 07. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 08. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói thật
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 09. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(B) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(C) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(D) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng

Câu 10. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$
(D) $\emptyset = \{\}$

Câu 12. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(C) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân

Câu 13. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$

Câu 14. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) A là tập hữu hạn
(B) $B \subseteq A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai
(D) $A \subset A$

Câu 15. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 4 (B) 3 (C) 1 (D) 2

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3n$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 20. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\frac{10}{11}$ (C) $\frac{55}{11}$ (D) 5

Câu 21. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 22. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(C) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (10)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (8) và (9) là tương đương

(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (8) và (9) là tương đương

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 26. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500
(B) 13839606000
(C) 1386011925
(D) 1383960600

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1
(B) -4
(C) -5
(D) -2

Câu 30. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 31. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 32. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(10n/11)$
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 33. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{2n} là $O(2^n)$ (D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 34. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x,n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) y^4 (B) x^4 (C) $y \cdot x^4$ (D) $x \cdot y^4$

Câu 35. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  for j := 2 to m do
      a := a + 1
      b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m+n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m)$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 38. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 39. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n^3)$

Câu 40. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
    if n > 1
        m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$

(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **344**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** A	**13.** A	**18.** B	**24.** D	**30.** D	**36.** C
02. D	**08.** A	**14.** C	**19.** C	**25.** C	**31.** C	**37.** D
03. B	**09.** C	**15.** D	**20.** B	**26.** B	**32.** A	**38.** D
04. B	**10.** A	**16.** A	**21.** A	**27.** C	**33.** C	**39.** B
05. A	**11.** C	**17.** C	**22.** B	**28.** B	**34.** C	**40.** A
06. C	**12.** D		**23.** C	**29.** B	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **615**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(B) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

Câu 03. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\, \text{isUpper}(x_j)$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 06. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \leftrightarrow y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \oplus y$ (D) $x \vee y$

Câu 08. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 09. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(B) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

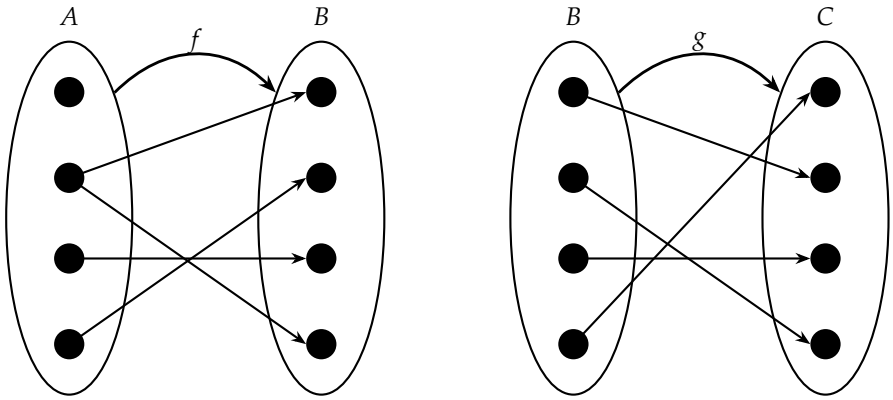
$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 3 (D) 1

Câu 12. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Câu 13. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 5 (B) $\frac{10}{11}$ (C) 10 (D) $\frac{55}{11}$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (B) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $n \cdot 2^{n+1} - 2$

Câu 16. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 1
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 0
(D) -1

Câu 17. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$

Câu 18. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$
(B) Cả ba phát biểu khác đều sai
(C) A là tập hữu hạn
(D) $A \subset A$

Câu 19. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$

Câu 20. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3^n + 2^n$ (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = n + 3$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) -1 (C) 0 (D) -2

Câu 25. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 26. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$ (B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3, a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3, a_1 = 7$

Câu 27. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4 (B) $y \cdot x^4$ (C) y^4 (D) $x \cdot y^4$

Câu 32. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
  i := i + 1
if x^2 = a_i then
  return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n)$

Câu 33. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 34. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m+n)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(n)$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$
(B) $f(n) = O(n^{2.32})$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

Câu 36. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts := $A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i-1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **615**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** A	**13.** D	**19.** C	**25.** B	**31.** B	**37.** A
02. D	**08.** B	**14.** B	**20.** B	**26.** B	**32.** D	**38.** A
03. A	**09.** C	**15.** B	**21.** C	**27.** D	**33.** D	
04. C	**10.** A	**16.** D	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**39.** A
05. A	**11.** C	**17.** A	**23.** B	**29.** C	**35.** D	
06. C	**12.** A	**18.** B	**24.** A	**30.** B	**36.** A	**40.** B

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **509**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$ (B) $\neg q \to p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $p \to q$

Câu 02. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 03. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (C) $x \vee y \vee z$ (D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$

Câu 08. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 09. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$

Câu 12. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 14. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 4/x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = 2^x$ (D) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$

Câu 15. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và x chẵn$\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và $-4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $A \subset A$
(C) A là tập hữu hạn
(D) $B \subseteq A$

Câu 16. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 5 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 10 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 18. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Câu 21. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12), P(13), P(14)$

Câu 22. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 23. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(B) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(C) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(D) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 26 (B) 18 (C) 14 (D) 22

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1383960500 (C) 1383960600 (D) 1386011925

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ ($n \geq 0$)?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ ($n \geq 1$), $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ ($n \geq 2$), $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -2 (D) -5

Câu 31. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (4) \\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (5) \\ &= O(1). && && (6) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 32. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$ (B) $O(\log n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 33. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$ (B) $O(y)$ (C) $O(x)$ (D) $O(1)$

Câu 34. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m + n)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(n)$

Câu 35. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{2n} là $O(2^n)$ (B) 2^{n+1} là $O(2^n)$

(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (D) $\log n + 1$ là $O(\log n)$

Câu 36. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $o(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^{d+1})$ (B) $O(n^d \log n)$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 38. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$ (B) $23n \log \log n + 3n \log n$

(C) $2^n \log n + n$ (D) $5n + 17 \log n$

Câu 39. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post} - 1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 40. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **509**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** B	**13.** A	**18.** D	**24.** A	**30.** B	**36.** B
02. A	**08.** D	**14.** D	**19.** B	**25.** D	**31.** C	**37.** B
03. C	**09.** A	**15.** A	**20.** D	**26.** B	**32.** B	**38.** B
04. A	**10.** A	**16.** B	**21.** A	**27.** D	**33.** D	**39.** D
05. C	**11.** A	**17.** D	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**40.** C
06. D	**12.** D		**23.** D	**29.** B	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **116**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n+3=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 02. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1=2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow 2 &= 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow 1+2 &= 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow 3 &= 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 03. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \rightarrow (z=y \vee z=x)))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \rightarrow (z=y \vee z=x)))$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(D) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$
(B) $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(C) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$
(B) $P(0,3)$
(C) $\exists y\, P(4,y)$
(D) $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$

Câu 10. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \rightarrow q)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \rightarrow P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow q$ luôn đúng

Câu 11. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset \in \emptyset$
(B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
(D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 12. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $B \subseteq A$
(C) A là tập hữu hạn
(D) $A \subset A$

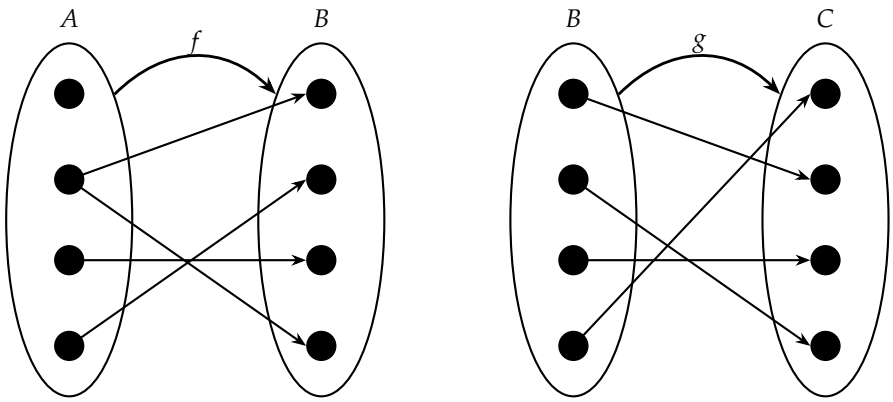
Câu 13. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?
(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân

Câu 14. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\{\}\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(D) $\emptyset = \{\}$

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 2

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 4

Câu 20. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) 1 (C) -2 (D) -5

Câu 22. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp

(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1386011925 (C) 1383960500 (D) 1383960600

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} \quad (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) -1 (C) 0 (D) -2

Câu 25. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(B) $P(15)$
(C) $P(12), P(13), P(14)$
(D) $P(12)$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 32. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

Câu 33. Giả sử $A[1\ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa $\mathsf{mileposts} := A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm $\mathsf{post} :=$ ROOTSEARCH$(\mathsf{mileposts}, x)$.
- Trả về ROOTSEARCH$(A[(\mathsf{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \mathsf{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x)$.

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.32})$
(B) $f(n) = O(n)$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n^5)$

Câu 35. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^3)$

Câu 36. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$ (B) $O(1)$ (C) $O(y)$ (D) $O(x)$

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$
(B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$
(C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$
(D) $f(x)$ là $O(g(x))$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **116**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**12.** A	**18.** B	**24.** A	**30.** B	**36.** B
02. D	**08.** A	**13.** C	**19.** C	**25.** D	**31.** C	**37.** D
03. C	**09.** C	**14.** D	**20.** B	**26.** B	**32.** B	**38.** A
04. C	**10.** D	**15.** A	**21.** A	**27.** A	**33.** A	**39.** A
05. B	**11.** A	**16.** A	**22.** A	**28.** B	**34.** C	**40.** D
06. C		**17.** A	**23.** B	**29.** B	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **822**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 03. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$
(B) $\exists y\, P(4, y)$
(C) $P(0, 3)$
(D) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$
(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \oplus Q(x, z))$
(C) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$ (B) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(C) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 09. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (B) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối (B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Peter nói thật và Alice nói dối (D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$ (B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$ (D) $\emptyset = \{\}$

Câu 12. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(C) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 13. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 14. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{N}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 15. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$ (B) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$ (D) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$

Câu 16. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$

Câu 17. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$

Câu 18. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 75 (B) 80 (C) 73 (D) 78

Câu 19. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3n$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 22. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".
Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1+n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a,b,c,d, ta có $a+b \geq c+d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1+n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1+0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1+k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1+(k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (7)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương

(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương

(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) -2 (C) 1 (D) -4

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1383960500 (C) 1383960600 (D) 1386011925

Câu 26. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 27. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 32. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 34. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $o(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 35. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post $:=$ ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 36. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (8)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (9)\\ &= O(1). && && (10) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n \log n)$
(C) $f(n) = O(10n/11)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 39. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x \cdot y)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m + n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **822**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** D	**13.** B	**19.** C	**25.** D	**30.** B	**36.** B
02. D	**08.** C	**14.** A	**20.** A	**26.** D	**31.** A	**37.** A
03. B	**09.** A	**15.** C	**21.** B	**27.** A	**32.** A	**38.** B
04. B	**10.** A	**16.** B	**22.** C	**28.** D	**33.** B	**39.** C
05. D	**11.** C	**17.** D	**23.** C	**29.** A	**34.** A	**40.** D
06. B	**12.** C	**18.** C	**24.** D		**35.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **538**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$ (B) $\neg q \to p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $p \to q$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$ (B) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$

Câu 03. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Chứng minh trên là đúng
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 06. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \leftrightarrow y$
(B) $x \wedge y$
(C) $x \oplus y$
(D) $x \vee y$

Câu 08. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 09. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 10. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 11. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) 1
(D) -1

Câu 12. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

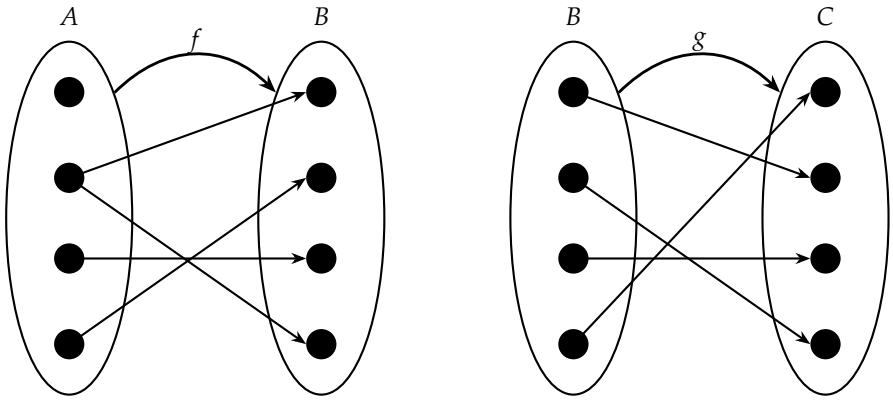
(A) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(B) $a_n = n + 3$
(C) $a_n = 3n$
(D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \in \emptyset$

Câu 18. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$
(B) Cả ba phát biểu khác đều sai
(C) A là tập hữu hạn
(D) $A \subset A$

Câu 19. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 4

Câu 20. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 80 (B) 75 (C) 78 (D) 73

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ và $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ cũng đúng

Câu 24. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(C) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (4)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (5)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1386011925 (B) 1383960600 (C) 13839606000 (D) 1383960500

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 29. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(C) $P(12), P(13), P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (9)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (7) và (8) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (7) và (8) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 32. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

Ⓐ $O(y)$ Ⓑ $O(x \cdot y)$ Ⓒ $O(1)$ Ⓓ $O(x)$

Câu 33. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

Ⓐ $O(n^{\log_3 2})$ Ⓑ $O(n^{\log 3})$ Ⓒ $O(n^2 \log n)$ Ⓓ $O(n^2)$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

Ⓐ $f(n) = O(n^{2.32})$
Ⓑ $f(n) = O(n)$
Ⓒ Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
Ⓓ $f(n) = O(n^5)$

Câu 35. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

Ⓐ $O(n \log n)$ Ⓑ $O(n)$ Ⓒ $O(\log n)$ Ⓓ $O(1)$

Câu 36. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (10)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (11)\\ &= O(1). && && (12) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ⓐ Không có gì sai trong chứng minh này
Ⓑ Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
Ⓒ Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
Ⓓ Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

Ⓐ $ca^i(n/b^i)^d$ Ⓑ $ca^i n^d$ Ⓒ $c(n/a^i)^d$ Ⓓ $c(n/b^i)^d$

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **538**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** A	**13.** A	**18.** B	**24.** C	**30.** B	**36.** B
02. C	**08.** B	**14.** D	**19.** B	**25.** A	**31.** B	**37.** A
03. A	**09.** D	**15.** A	**20.** D	**26.** A	**32.** C	**38.** A
04. B	**10.** B	**16.** A	**21.** D	**27.** D	**33.** D	**39.** B
05. D	**11.** D	**17.** D	**22.** A	**28.** A	**34.** C	**40.** A
06. C	**12.** C		**23.** B	**29.** B	**35.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **066**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$

Câu 02. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Chứng minh trên là sai

Câu 03. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 04. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 06. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(B) $x \wedge y \wedge z$
(C) $x \oplus y \oplus z$
(D) $x \vee y \vee z$

Câu 08. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 09. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$

Câu 10. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = n(n + 1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n + 1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{10}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{55}{11}$ (D) 5

Câu 12. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = 2n + 3$ (C) $a_n = n^2$ (D) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 15. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

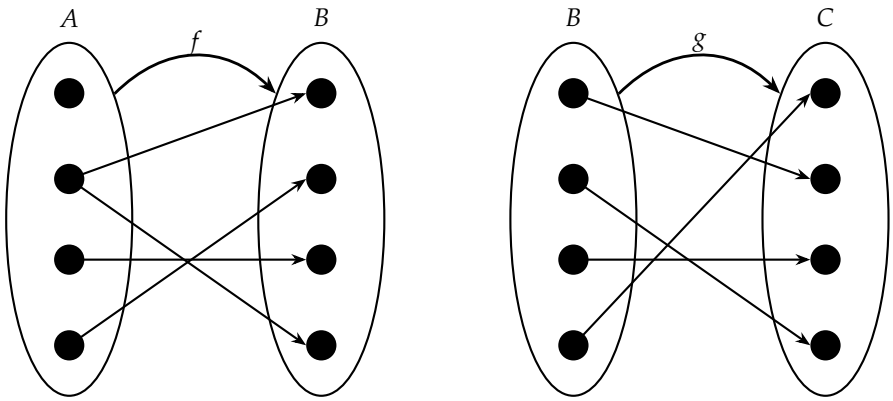
Câu 17. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 4/x$ (B) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (C) $f(x) = 2^x$ (D) $f(x) = 2x$

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = 3^n + 2^n$ (C) $a_n = n + 3$ (D) $a_n = 3n$

Câu 19. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 20. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{N}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{Q}$ (D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (5)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (6)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) -5 (C) -4 (D) 1

Câu 24. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$

Câu 25. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) -2 (B) -1 (C) Không thể tính được (D) 0

Câu 28. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.
(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

Câu 30. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 31. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{2n} là $O(2^n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 32. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 33. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+\ P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (10) \\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (11) \\ &= O(1). && && (12) \end{aligned}$$

  Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 34. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) $f(n) = O(n \log n)$
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(10n/11)$
(D) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

Câu 36. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(\log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?
(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.
(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **066**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** D	**13.** B	**19.** D	**25.** B	**31.** A	**37.** A
02. D	**08.** D	**14.** B	**20.** D	**26.** B	**32.** C	**38.** D
03. A	**09.** A	**15.** C	**21.** C	**27.** C	**33.** D	**39.** A
04. D	**10.** D	**16.** A	**22.** C	**28.** B	**34.** D	**40.** D
05. A	**11.** A	**17.** B	**23.** C	**29.** A	**35.** D	
06. C	**12.** A	**18.** A	**24.** C	**30.** A	**36.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **092**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$
(B) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$

Câu 03. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$ (B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$

Câu 08. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0,3)$ (B) $\exists y\, P(4,y)$ (C) $\forall x \forall y\, P(x,y)$ (D) $\forall y \exists x\, P(x,y)$

Câu 09. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 10. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p,q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p,q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng

Câu 11. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9,9,9,9,9,\ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n+1)\cdot 2^n - 2$ (B) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (C) $(n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n-1)\cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 13. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$ (B) A là tập hữu hạn
(C) $A \subset A$ (D) Cả ba phát biểu khác đều sai

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 16. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 78 (B) 80 (C) 75 (D) 73

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2n + 3$ (B) $a_n = n^2$ (C) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (D) $a_n = 2^n$

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(B) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(C) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) 0 (B) -2 (C) Không thể tính được (D) -1

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên* $n \in \mathbb{N}$, *ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực* a, b, c, d, *ta có* $a + b \geq c + d$ *khi và chỉ khi* $a \geq c$ *và* $b \geq d$.

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$P(k+1) = 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} \quad \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} \quad (7)$$
$$= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (8)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (9)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 25. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (10)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (11)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác

Câu 26. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

Câu 27. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 14 (B) 22 (C) 26 (D) 18

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -2 (D) -5

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $ca^i (n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $c(n/a^i)^d$

Câu 32. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^{\log_3 2})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 33. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m \cdot n)$ (D) $O(m+n)$

Câu 34. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (12)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (13)\\ &= O(1). && && (14) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$ (B) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(C) $\log n + 1$ là $O(\log n)$ (D) 2^{2n} là $O(2^n)$

Câu 37. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), 𝒟):
    for x in 𝒟 do
        for y in 𝒟 do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i-1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 39. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$
(B) $O(n \log n)$
(C) $O(n)$
(D) $O(\log n)$

Câu 40. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **092**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** D	**18.** B	**24.** C	**30.** B	**36.** D
02. C	**08.** B	**14.** B	**19.** B	**25.** A	**31.** B	**37.** D
03. C	**09.** A	**15.** D	**20.** C	**26.** D	**32.** C	**38.** C
04. B	**10.** D	**16.** D	**21.** B	**27.** C	**33.** C	**39.** D
05. A	**11.** C	**17.** A	**22.** C	**28.** A	**34.** A	**40.** D
06. D	**12.** D		**23.** C	**29.** C	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **212**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\, \text{isUpper}(x_j)$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$

Câu 03. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(B) $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(C) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$
(D) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \to \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 05. Cho p và q là các mệnh đề sau:

p = "Tôi đi bơi."
q = "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg p \to q$ (B) $\neg q \to p$ (C) $p \to q$ (D) $q \to \neg p$

Câu 06. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (B) $x \wedge y \wedge z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 08. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

Câu 09. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\,(x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\,(x < y)$
(B) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(C) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(D) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng

Câu 10. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là sai
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 3 (D) 1

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3^n + 2^n$ (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (C) $a_n = n + 3$ (D) $a_n = 3n$

Câu 13. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân

Câu 14. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) A là tập hữu hạn
(B) $B \subseteq A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai
(D) $A \subset A$

Câu 15. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$
(B) $a_n = n^2$
(C) $a_n = 2n + 3$
(D) $a_n = 2^n$

Câu 16. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$

Câu 17. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 1
(B) 3
(C) 4
(D) 2

Câu 18. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) -1
(D) 1

Câu 19. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 102
(B) 100
(C) 101
(D) 103

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 2^x$
(B) $f(x) = 2x$
(C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$
(D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (1)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (2)$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(D) $P(12)$

Câu 24. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ và $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng

Câu 25. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$

Câu 27. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?
(A) -4 (B) 1 (C) -2 (D) -5

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (3) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (4) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (5) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (3) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 32. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m+1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j+1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i+1
      else
          B[k] := A[j]; j := j+1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ (B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$ (D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

Câu 33. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2 \log n)$ (D) $O(n^2)$

Câu 34. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n-1)
  return ♢
```

Cần thay $\diamondsuit$ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) y^4 (B) x^4 (C) $y \cdot x^4$ (D) $x \cdot y^4$

Câu 35. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(\log n)$ (D) $O(1)$

Câu 36. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$ (B) $O(1)$ (C) $O(y)$ (D) $O(x)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 38. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(B) $\exists x \in \mathcal{D} \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(C) $\forall x \in \mathcal{D} \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 39. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$

Câu 40. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (6)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (7)\\ &= O(1). && && (8) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **212**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**06.** C	**12.** B	**18.** C	**24.** A	**30.** B	**36.** B
02. D	**07.** D	**13.** C	**19.** A	**25.** B	**31.** A	**37.** A
03. D	**08.** D	**14.** C	**20.** C	**26.** B	**32.** A	**38.** D
04. A	**09.** C	**15.** C	**21.** B	**27.** D	**33.** D	**39.** B
05. D	**10.** B	**16.** C	**22.** D	**28.** A	**34.** C	**40.** C
	11. D	**17.** D	**23.** C	**29.** A	**35.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **635**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?
(A) $x \oplus y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \vee y$

Câu 02. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $\forall x \, \forall y \, P(x, y)$ (B) $P(0, 3)$ (C) $\exists y \, P(4, y)$ (D) $\forall y \, \exists x \, P(x, y)$

Câu 03. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x \, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x \, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x \, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x \, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} \, (x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = n(n + 1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N} \, P(n) \to P(n + 1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 05. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Peter nói thật và Alice nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 06. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (B) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$ (D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$

Câu 07. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$ (B) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(C) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$ (D) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

Câu 08. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.
(A) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

Câu 09. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Chứng minh trên là sai
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là đúng
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 10. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 12. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 103 (B) 101 (C) 100 (D) 102

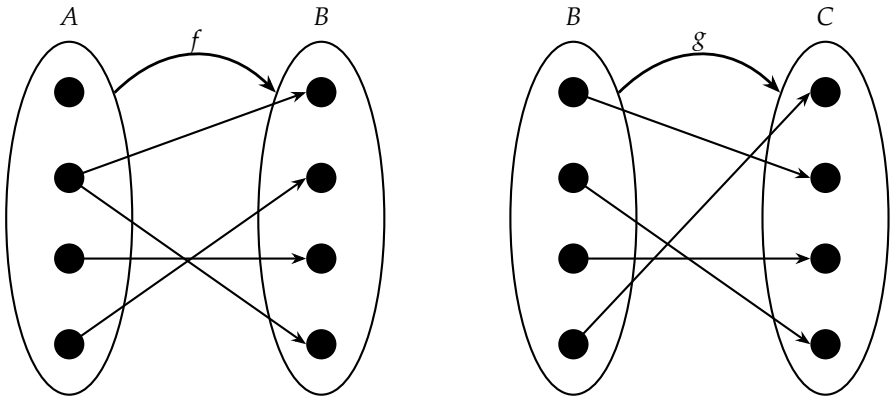
Câu 13. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset \in \emptyset$ (B) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Câu 14. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 15. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = n^2$ (C) $a_n = 2n+3$ (D) $a_n = 2^n$

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 5 (B) $\dfrac{55}{11}$ (C) 10 (D) $\dfrac{10}{11}$

Câu 18. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(C) -1
(D) 1

Câu 19. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$

Câu 20. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) 1 (C) -2 (D) -5

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (1)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (2)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -1 (B) Không thể tính được (C) -2 (D) 0

Câu 24. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(B) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(C) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(D) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

Câu 25. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$ (B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$ (D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 26. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500
(B) 1383960600
(C) 13839606000
(D) 1386011925

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (3) \\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (4) \\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (5) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (3) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 32. Giả sử $A[1 \dots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \dots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \dots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 33. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $2^n \log n + n$
(B) $23n \log\log n + 3n \log n$
(C) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(D) $5n + 17 \log n$

Câu 34. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x² ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x² = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(1)$ (B) $O(n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^3)$

Câu 35. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^3)$

Câu 36. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (6)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (7)\\ &= O(1). && && (8) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

Câu 37. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(\log n)$ (D) $O(n)$

Câu 38. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
    if n > 1
        m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(D) $T(n) = T(n/2) + O(1)$

Câu 39. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?
(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$

Câu 40. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SuperPower(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SuperPower(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay $\diamondsuit$ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?
(A) $x \cdot y^4$
(B) $y \cdot x^4$
(C) y^4
(D) x^4

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **635**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** B	**13.** A	**19.** D	**25.** B	**30.** B	**36.** B
02. C	**08.** D	**14.** A	**20.** B	**26.** D	**31.** B	**37.** C
03. C	**09.** A	**15.** C	**21.** A	**27.** D	**32.** B	**38.** C
04. A	**10.** C	**16.** B	**22.** D	**28.** D	**33.** B	**39.** C
05. D	**11.** C	**17.** D	**23.** B	**29.** A	**34.** B	**40.** B
06. A	**12.** D	**18.** C	**24.** C		**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **146**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$ (B) $P(0, 3)$ (C) $\exists y\, P(4, y)$ (D) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$

Câu 03. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói thật
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 04. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \vee y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \oplus y$

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(D) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 07. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(B) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(C) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(D) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$

Câu 10. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 11. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$
(D) $\emptyset = \{\}$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$
(B) $a_n = 2^n$
(C) $a_n = 2n + 3$
(D) $a_n = n^2$

Câu 13. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 14. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

Câu 15. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3^n + 2^n$ (B) $a_n = 3n$ (C) $a_n = n + 3$ (D) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) $\frac{55}{11}$ (B) 10 (C) $\frac{10}{11}$ (D) 5

Câu 17. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$

Câu 18. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 19. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 102 (B) 100 (C) 101 (D) 103

Câu 20. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{N}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{Q}$ (D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 22. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(12)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 23. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) -2 (C) 1 (D) -4

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} \quad (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -1 (B) -2 (C) 0 (D) Không thể tính được

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 27. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ và $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ cũng đúng

Câu 28. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$ (B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$ (D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 32. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (D) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 33. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $O(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 34. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), 𝒟):
    for x in 𝒟 do
        for y in 𝒟 do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(C) $\exists x \in \mathcal{D} \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(D) $\forall x \in \mathcal{D} \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$

Câu 35. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i-1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 36. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$
(B) $O(1)$
(C) $O(y)$
(D) $O(x)$

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\omega(g(x))$

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^{2.32})$
(D) $f(n) = O(n^5)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^2)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **146**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** C	**13.** D	**19.** A	**25.** D	**31.** B	**37.** B
02. C	**08.** C	**14.** B	**20.** D	**26.** D	**32.** C	**38.** A
03. C	**09.** C	**15.** D	**21.** A	**27.** C	**33.** D	
04. C	**10.** B	**16.** C	**22.** B	**28.** B	**34.** A	**39.** A
05. B	**11.** C	**17.** D	**23.** D	**29.** C	**35.** C	
06. C	**12.** C	**18.** D	**24.** D	**30.** B	**36.** B	**40.** B

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **626**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 02. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall x \, \forall y \, P(x, y)$ (B) $P(0, 3)$ (C) $\exists y \, P(4, y)$ (D) $\forall y \, \exists x \, P(x, y)$

Câu 03. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $\neg p \to q$ (B) $p \to q$ (C) $q \to \neg p$ (D) $\neg q \to p$

Câu 04. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} \, (x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = n(n + 1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N} \, P(n) \to P(n + 1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

Câu 05. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x \, ((x \neq 0) \to \forall y \, (xy = 1))$
(B) $\exists x \, ((x \neq 0) \to \forall y \, (xy = 1))$
(C) $\forall x \, ((x \neq 0) \to \exists y \, (xy = 1))$
(D) $\exists x \, ((x \neq 0) \to \exists y \, (xy = 1))$

Câu 06. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 07. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 08. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$
(D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

Câu 09. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(D) $\exists x\, \forall y\, \exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 10. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 11. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 12. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 13. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5-2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) 0
(B) -1
(C) 1
(D) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 15. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

Câu 16. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{N}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (B) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (C) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (D) $n \cdot 2^{n+1} - 2$

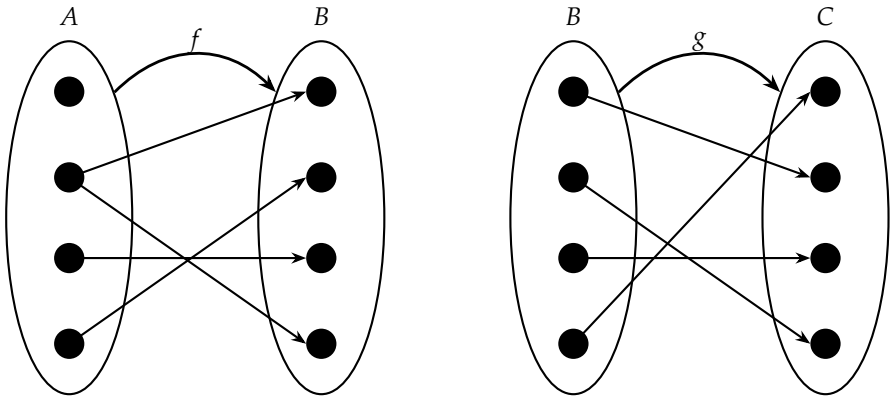
Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 19. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$

Câu 20. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh (B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh (D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(C) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?
(A) -2 (B) -4 (C) 1 (D) -5

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (8)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (9)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$

Câu 28. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ và $P(a+3, b+2)$ cũng đúng

Câu 29. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 30. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 31. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4 (B) $y \cdot x^4$ (C) y^4 (D) $x \cdot y^4$

Câu 32. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
  i := i + 1
if x^2 = a_i then
  return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n)$

Câu 33. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $O(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\omega(g(x))$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n^{2.58})$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 35. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i n^d$ (B) $c(n/b^i)^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $ca^i(n/b^i)^d$

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 38. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (10)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (11)\\ &= O(1). && && (12) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

Ⓐ $O(n^{\log 3})$ Ⓑ $O(n^2 \log n)$ Ⓒ $O(n^2)$ Ⓓ $O(n^{\log_3 2})$

Câu 40. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

Ⓐ $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ Ⓑ $g(x)$ là $O(f(x))$ Ⓒ $f(x)$ là $o(g(x))$ Ⓓ $f(x)$ là $O(g(x))$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **626**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** B	**19.** D	**24.** D	**30.** A	**36.** D
02. C	**08.** D	**14.** D	**20.** A	**25.** B	**31.** B	**37.** C
03. C	**09.** A	**15.** A	**21.** D	**26.** C	**32.** D	**38.** D
04. A	**10.** B	**16.** D	**22.** A	**27.** D	**33.** C	**39.** C
05. C	**11.** D	**17.** B	**23.** C	**28.** D	**34.** C	**40.** C
06. C	**12.** C	**18.** C		**29.** A	**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **526**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$ (B) $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$ (D) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

Câu 02. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y=xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (B) $P(0,3)$ (C) $\exists y\,P(4,y)$ (D) $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$

Câu 03. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1=2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1=2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2=1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1+2=2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3=3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 04. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $\neg p \to q$ (C) $\neg q \to p$ (D) $q \to \neg p$

Câu 05. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x+y=0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Cả Alice và Peter đều nói thật
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói dối
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 07. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) Cho $P(n)$ là vị từ $1+2+\cdots+n+(n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?
(A) $x \oplus y$
(B) $x \wedge y$
(C) $x \leftrightarrow y$
(D) $x \vee y$

Câu 11. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = 2^n$
(B) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$
(C) $a_n = n^2$
(D) $a_n = 2n + 3$

Câu 12. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?

(A) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng
(B) 0
(C) -1
(D) 1

Câu 13. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{\{\}\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 14. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 73 (B) 75 (C) 80 (D) 78

Câu 15. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và x chẵn$\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và $-4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $A \subset A$
(C) A là tập hữu hạn
(D) $B \subseteq A$

Câu 16. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?
(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(B) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

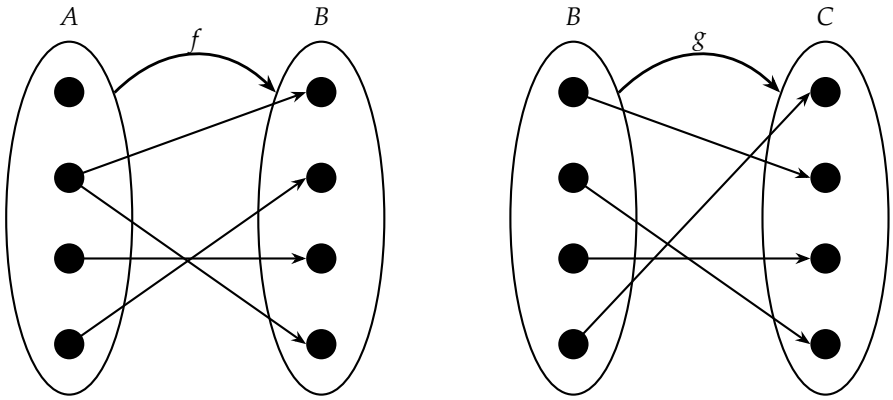
Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 20. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 21. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

Câu 22. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?



Hình 1: Các quan hệ f và g.

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 23. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 26 (B) 18 (C) 14 (D) 22

Câu 25. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (10)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (11)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) -2 (C) -5 (D) 1

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (12)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (13)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (14)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (15)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (13) và (14) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (13) và (14) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m \cdot n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(n)$

Câu 32. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$ (B) $O(\log n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 33. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
    if n > 1
        m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = T(n/2) + O(n)$

(C) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = T(n/2) + O(1)$

Câu 34. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay $\diamondsuit$ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) y^4 (B) x^4 (C) $y \cdot x^4$ (D) $x \cdot y^4$

Câu 35. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $f(x)$ là $o(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $g(x)$ là $O(f(x))$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) $f(n) = O(n)$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 37. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
   i := i + 1
if x^2 = a_i then
   return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

Ⓐ $O(n^2)$ Ⓑ $O(n)$ Ⓒ $O(n^3)$ Ⓓ $O(1)$

Câu 38. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
   for y := 0 to 5 do
      x := x − 1
      y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

Ⓐ $O(x)$ Ⓑ $O(y)$ Ⓒ $O(x \cdot y)$ Ⓓ $O(1)$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
   ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
   if n > 1
      m := f_{ℓ−1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
   ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
   i := 1; j := m + 1
   for k := 1 to n do
      if j > n then
         B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
         B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
         B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
         B[k] := A[j]; j := j + 1
   for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

Ⓐ $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$ Ⓑ $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

Ⓒ $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$ Ⓓ $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (16)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (17)\\ &= O(1). && && (18) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **526**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**13.** C	**19.** D	**24.** A	**30.** B	**36.** C
02. C	**08.** C	**14.** A	**20.** A	**25.** B	**31.** A	**37.** B
03. A	**09.** B	**15.** A	**21.** B	**26.** C	**32.** B	**38.** D
04. D	**10.** C	**16.** A	**22.** A	**27.** A	**33.** A	**39.** A
05. D	**11.** D	**17.** C	**23.** D	**28.** B	**34.** C	**40.** C
06. B	**12.** C	**18.** D		**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **812**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \oplus y \oplus z$ (B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (C) $x \wedge y \wedge z$ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 02. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$

Câu 03. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 04. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $\neg p \to q$ (C) $\neg q \to p$ (D) $q \to \neg p$

Câu 05. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$
(C) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$

Câu 06. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 07. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 08. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
& 1 = 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow\ & 2 = 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2 = 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow\ & 3 = 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 09. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\forall y\,\exists x\,P(x, y)$ (B) $P(0, 3)$ (C) $\exists y\,P(4, y)$ (D) $\forall x\,\forall y\,P(x, y)$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \vee y$

Câu 11. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 2 (B) 4 (C) 3 (D) 1

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3^n + 2^n$ (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (C) $a_n = n + 3$ (D) $a_n = 3n$

Câu 13. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 1 (C) 3 (D) 4

Câu 14. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 102 (B) 103 (C) 101 (D) 100

Câu 17. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\}$
(B) $\emptyset = \{\{\}\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$

Câu 18. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 19. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n - 3), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n - 3), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n - 1), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n - 1), a_1 = 3$

Câu 20. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và x chẵn$\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và $-4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $B \subseteq A$
(C) $A \subset A$
(D) A là tập hữu hạn

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$P(k+1) = 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} \quad \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} \tag{7}$$
$$= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{8}$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \tag{9}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -1 (B) Không thể tính được (C) -2 (D) 0

Câu 24. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (11)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (12)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (13)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (11) và (12) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (11) và (12) là tương đương

Câu 25. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (14)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (15)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (14) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 13839606000 (C) 1386011925 (D) 1383960600

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 32. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LOGICALVALUE(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(B) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n\log n)$
(B) $O(n^{d+1})$
(C) $O(n^d \log n)$
(D) $O(n^d)$

Câu 34. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay $\diamondsuit$ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) y^4
(B) x^4
(C) $y \cdot x^4$
(D) $x \cdot y^4$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (16)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (17)\\ &= O(1). && && (18) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $o(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 37. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(B) 2^{2n} là $O(2^n)$
(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^{2.32})$
(D) $f(n) = O(n^5)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $c(n/b^i)^d$ (D) $ca^i n^d$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **812**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**06.** B	**12.** B	**18.** C	**24.** D	**30.** A	**36.** B
02. D	**07.** B	**13.** C	**19.** D	**25.** D	**31.** C	**37.** B
03. A	**08.** D	**14.** B	**20.** A	**26.** C	**32.** C	**38.** A
04. D	**09.** C	**15.** A	**21.** B	**27.** C	**33.** C	**39.** A
05. A	**10.** C	**16.** A	**22.** B	**28.** A	**34.** C	**40.** B
	11. A	**17.** B	**23.** B	**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **937**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 02. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(B) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\, \text{isUpper}(x_j)$

Câu 04. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $\neg p \to q$ (C) $\neg q \to p$ (D) $q \to \neg p$

Câu 05. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$

(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$ (B) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$ (D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 06. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$ (B) $\exists x \exists y \forall z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

(C) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\, (P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 07. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$ (B) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

(C) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$ (D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 08. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng

(B) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng

(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng

(D) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$

Câu 09. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 10. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 3 (D) 1

Câu 12. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$

(C) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 14. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$ (B) $n\cdot 2^{n+1}-2$ (C) $(n+1)\cdot 2^{n}-2$ (D) $(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

Câu 15. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2n + 3$ (B) $a_n = n^2$ (C) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (D) $a_n = 2^n$

Câu 18. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{\}$
(D) $\emptyset = \{\{\}\}$

Câu 19. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân

Câu 20. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 22 (B) 14 (C) 18 (D) 26

Câu 22. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (3)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (4)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (5) \end{aligned}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (3) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1386011925 (C) 1383960500 (D) 1383960600

Câu 24. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) -4 (C) 1 (D) -5

Câu 26. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(B) $P(12)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

Câu 27. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) 0
(B) -2
(C) Không thể tính được
(D) -1

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (6)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (7)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác

Câu 31. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), 𝒟):
    for x in 𝒟 do
        for y in 𝒟 do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(B) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$
(D) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$

Câu 32. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n)$

Câu 33. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán RootSearch để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
    if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
        ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
        for i := 1 to n do
            if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
                return i
    ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
    k := ⌊√n⌋
    mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
    for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
        mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
    ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
    post := RootSearch(mileposts, x)
    ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
    return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 34. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $5n + 17 \log n$
(B) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(C) $23n \log \log n + 3n \log n$
(D) $2^n \log n + n$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$T(k+1) = T(k) + O(1) \quad \text{(Giả thiết)} \tag{8}$$
> $$= O(1) + O(1) \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{9}$$
> $$= O(1). \tag{10}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m+n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(m \cdot n)$

Câu 37. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 38. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $O(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 39. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(1)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n^{2.32})$
(D) $f(n) = O(n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **937**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** A	**19.** A	**25.** B	**31.** C	**37.** B
02. A	**08.** B	**14.** D	**20.** B	**26.** D	**32.** D	**38.** D
03. A	**09.** B	**15.** C	**21.** D	**27.** D	**33.** A	
04. D	**10.** A	**16.** B	**22.** A	**28.** A	**34.** C	**39.** D
05. A	**11.** C	**17.** A	**23.** B	**29.** C	**35.** B	
06. C	**12.** A	**18.** D	**24.** C	**30.** C	**36.** D	**40.** B

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **881**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng

Câu 02. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(B) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$

Câu 04. Gọi $P(x, y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
(B) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
(D) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$
(B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(C) $x \vee y \vee z$
(D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 06. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".

(A) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 07. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$$p = \text{“Tôi đi bơi.”}$$
$$q = \text{“Trời mưa.”}$$

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Tôi không đi bơi khi trời mưa.”

(A) $\neg q \to p$ (B) $\neg p \to q$ (C) $q \to \neg p$ (D) $p \to q$

Câu 08. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói thật
(C) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \wedge y$ (B) $x \oplus y$ (C) $x \vee y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 10. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0, 3)$ (B) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$ (C) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$ (D) $\exists y\, P(4, y)$

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 12. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 103 (B) 101 (C) 100 (D) 102

Câu 13. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$

Câu 14. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

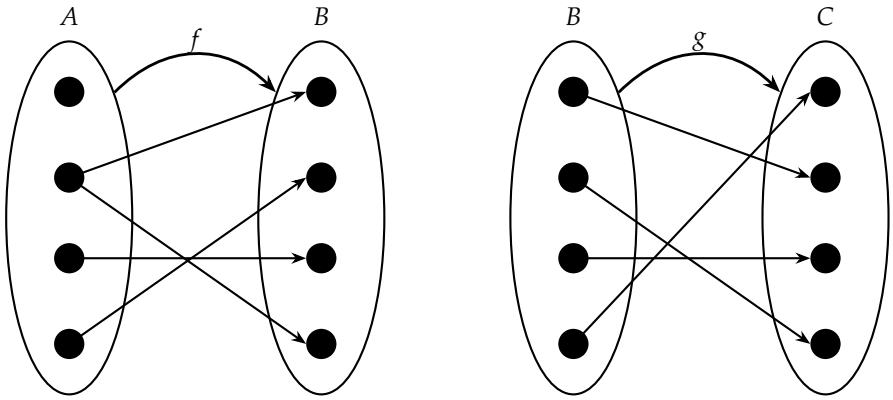
(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

Câu 15. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 80 (B) 78 (C) 73 (D) 75

Câu 16. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) A là tập hữu hạn
(B) $A \subset A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai
(D) $B \subseteq A$

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ định nghĩa bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ và $g(x) = \lceil (5 - 2x)/3 \rceil$. Giá trị của $(f \circ g)(5)$ là?
(A) 1
(B) -1
(C) 0
(D) Không có đáp án nào trong ba đáp án còn lại là đúng

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 22. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2, b+3) \in S$ và $(a+3, b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ và $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3, b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2, b+3)$ cũng đúng

Câu 24. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(B) $P(15)$
(C) $P(12)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -2
(B) -4
(C) 1
(D) -5

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (1)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (2)$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 27. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?
(A) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$P(k+1) = 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} \quad \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} \tag{3}$$
$$= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \tag{4}$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \tag{5}$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (3) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(D) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?
(A) 14 (B) 22 (C) 18 (D) 26

Câu 31. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?
(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(B) $23n \log\log n + 3n \log n$
(C) $5n + 17 \log n$
(D) $2^n \log n + n$

Câu 32. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^{\log_3 2})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?
(A) $c(n/a^i)^d$ (B) $ca^i(n/b^i)^d$ (C) $ca^i n^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 34. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
    if n > 1
        m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (6)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (7)\\ &= O(1). && && (8) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n \log n)$ (B) $O(n^d)$ (C) $O(n^{d+1})$ (D) $O(n^d \log n)$

Câu 37. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 38. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) 2^{2n} là $O(2^n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(D) 2^{n+1} là $O(2^n)$

Câu 39. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
   i := i + 1
if x^2 = a_i then
   return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n^3)$

Câu 40. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **881**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** C	**12.** D	**18.** B	**24.** D	**30.** D	**36.** D
02. D	**08.** A	**13.** B	**19.** B	**25.** B	**31.** B	**37.** B
03. B	**09.** D	**14.** D	**20.** D	**26.** C	**32.** C	**38.** A
04. B	**10.** D	**15.** C	**21.** A	**27.** A	**33.** B	**39.** B
05. C	**11.** C	**16.** C	**22.** A	**28.** B	**34.** C	**40.** C
06. B		**17.** C	**23.** B	**29.** B	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **987**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \vee y$

Câu 02. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$ (B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$ (D) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$ (B) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$

Câu 04. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $\exists y\,P(4, y)$ (B) $\forall y\,\exists x\,P(x, y)$ (C) $\forall x\,\forall y\,P(x, y)$ (D) $P(0, 3)$

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$ (B) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$ (D) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 06. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng (B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng (D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 07. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 08. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y \left(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x))\right)$
(B) $\exists x \exists y \left(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y\right)$
(C) $\exists x \exists y \left(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x))\right)$
(D) $\exists x \exists y \left(P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn})\right)$

Câu 09. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.
(A) $\exists i \in \{1, \dots, n\} \left(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i)\right)$
(B) $\exists i \in \{1, \dots, n\} \left(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i)\right)$
(C) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \left(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i)\right)$
(D) $\forall i \in \{1, \dots, n\} \left(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)\right) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\} \, \text{isUpper}(x_j)$

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x \, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x \, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x \, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x \, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2 (B) 4 (C) 3 (D) 1

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$

(A) 10 (B) $\frac{10}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{55}{11}$

Câu 13. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 14. Cho hàm $f : A \rightarrow B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(D) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$

Câu 15. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$

Câu 16. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 17. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\}$
(B) $\emptyset = \{\{\}\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$

Câu 18. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ (B) $a_n = 2^n$ (C) $a_n = n^2$ (D) $a_n = 2n + 3$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 22. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?
(A) $P(12)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

Câu 24. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (3)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (4)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (3) không chính xác
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 25. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 26. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?
(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(B) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(C) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 27. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 28. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên* $n \in \mathbb{N}$, *ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực* a, b, c, d, *ta có* $a + b \geq c + d$ *khi và chỉ khi* $a \geq c$ *và* $b \geq d$.

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (8)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(B) Không có gì sai trong chứng minh này
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (6) và (7) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 14 (B) 22 (C) 18 (D) 26

Câu 31. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $6n \log n + n^{1.1} + 2$ (B) $23n \log\log n + 3n \log n$
(C) $5n + 17 \log n$ (D) $2^n \log n + n$

Câu 32. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$ (B) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$ (D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

Câu 33. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
  if n = 1 then
      return x^2
  y := SUPERPOWER(x, n − 1)
  return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) $x \cdot y^4$ (B) $y \cdot x^4$ (C) x^4 (D) y^4

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n)$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n^{2.58})$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (9)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (10)\\ &= O(1). && && (11) \end{aligned}$$

Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n)+g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k)=O(1)$ và $T(k+1)=O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k)=T(k-1)+O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $o(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các *mức (level)* trong *cây đệ quy (recursion tree)* được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Tổng lượng công việc (không tính các lời gọi đệ quy) thực hiện ở mức i (với $0 \leq i \leq L$) của cây đệ quy là?

(A) $ca^i(n/b^i)^d$ (B) $ca^i n^d$ (C) $c(n/a^i)^d$ (D) $c(n/b^i)^d$

Câu 38. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
   i := i + 1
if x^2 = a_i then
   return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^2)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n^3)$

Câu 40. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) 2^{2n} là $O(2^n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **987**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** A	**13.** D	**18.** A	**24.** B	**30.** D	**36.** B
02. C	**08.** A	**14.** A	**19.** B	**25.** B	**31.** B	**37.** A
03. B	**09.** A	**15.** D	**20.** D	**26.** B	**32.** B	**38.** D
04. A	**10.** C	**16.** D	**21.** B	**27.** D	**33.** B	**39.** B
05. A	**11.** C	**17.** B	**22.** B	**28.** A	**34.** C	**40.** D
06. C	**12.** B		**23.** B	**29.** C	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **809**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n+3=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4=2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4=2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 02. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1=2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$
\begin{aligned}
1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\
\Leftrightarrow 2 &= 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\
\Leftrightarrow 1+2 &= 2+1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\
\Leftrightarrow 3 &= 3. && && (4)
\end{aligned}
$$

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 03. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x,y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(C) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \rightarrow (z=y \vee z=x)))$
(D) $\exists x \exists y\,(P(x,\text{Tuấn}) \wedge P(y,\text{Tuấn}) \wedge \forall z(P(z,\text{Tuấn}) \rightarrow (z=y \vee z=x)))$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(C) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(D) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?
(A) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$
(B) $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x))$
(C) $(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $\forall y\, \exists x\, P(x,y)$
(B) $P(0,3)$
(C) $\exists y\, P(4,y)$
(D) $\forall x\, \forall y\, P(x,y)$

Câu 10. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \rightarrow q)$ luôn đúng
(B) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \rightarrow P(n+1)$ luôn đúng
(D) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow q$ luôn đúng

Câu 11. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset \in \emptyset$
(B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
(D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 12. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) Cả ba phát biểu khác đều sai
(B) $B \subseteq A$
(C) A là tập hữu hạn
(D) $A \subset A$

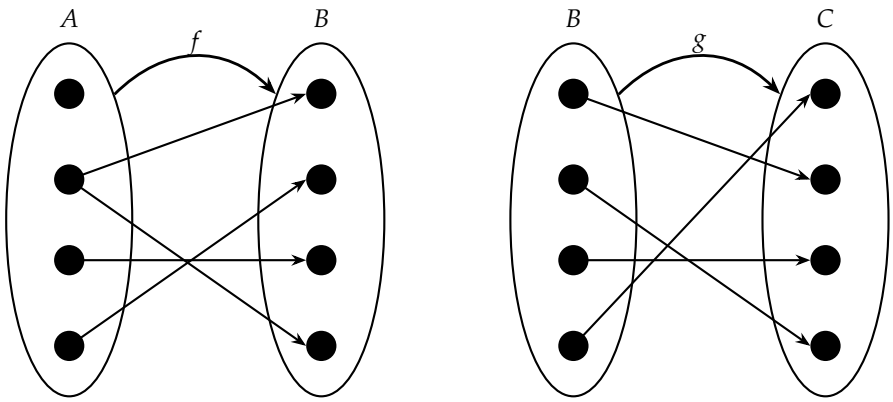
Câu 13. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?
(A) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(B) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(D) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân

Câu 14. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 3

Câu 15. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 16. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\{\}\}$
(B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(D) $\emptyset = \{\}$

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 2

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{5}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{6}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh
(D) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 4

Câu 20. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 \quad (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -4 (B) 1 (C) -2 (D) -5

Câu 22. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp

(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng

(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 23. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1386011925 (C) 1383960500 (D) 1383960600

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} \quad (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) -1 (C) 0 (D) -2

Câu 25. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$, $P(2, 3)$, và $P(3, 2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0, 0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a, b) \in S$ nào đó, $P(a, b)$ đúng, và chứng minh $P(a + 2, b + 3)$ và $P(a + 3, b + 2)$ cũng đúng

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (7)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (9) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12), P(13), P(14), P(15)$
(B) $P(15)$
(C) $P(12), P(13), P(14)$
(D) $P(12)$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng

Câu 31. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 32. Thời gian chạy của thuật toán MERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(n)$
(B) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(1)$
(D) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$

Câu 33. Giả sử $A[1\ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 34. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.32})$
(B) $f(n) = O(n)$
(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(D) $f(n) = O(n^5)$

Câu 35. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^{\log_4 2})$ (D) $O(n^3)$

Câu 36. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$ (B) $O(1)$ (C) $O(y)$ (D) $O(x)$

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 39. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$

Câu 40. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **809**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** D	**12.** A	**18.** B	**24.** A	**30.** B	**36.** B
02. D	**08.** A	**13.** C	**19.** C	**25.** D	**31.** C	**37.** D
03. C	**09.** C	**14.** D	**20.** B	**26.** B	**32.** B	**38.** A
04. C	**10.** D	**15.** A	**21.** A	**27.** A	**33.** A	**39.** A
05. B	**11.** A	**16.** A	**22.** A	**28.** B	**34.** C	**40.** D
06. C		**17.** A	**23.** B	**29.** B	**35.** A	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **601**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \oplus y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \wedge y$ (D) $x \vee y$

Câu 02. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $x \oplus y \oplus z$ (D) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 04. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c) =$ "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c) =$ "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c) =$ "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x = x_1 x_2 \dots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(C) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1, \dots, n\}\, \text{isUpper}(x_j)$
(D) $\exists i \in \{1, \dots, n\}\, (\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$

Câu 05. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$
(B) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$
(C) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(D) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Chứng minh trên là đúng
(C) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(D) Chứng minh trên là sai

Câu 09. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\forall x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\,\forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\,\exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$ (B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$ (C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ (D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 12. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) 3

Câu 13. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3n$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 14. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.
(A) A là tập hữu hạn
(B) $B \subseteq A$
(C) Cả ba phát biểu khác đều sai
(D) $A \subset A$

Câu 15. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 80 (B) 78 (C) 73 (D) 75

Câu 16. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 17. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?
(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$

Câu 18. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Câu 19. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?
(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 20. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2^x$ (B) $f(x) = 2x$ (C) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (D) $f(x) = 4/x$

Câu 21. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?
(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 22. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(B) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(C) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng
(D) Có thể sử dụng quy nạp mạnh

Câu 23. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(C) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 24. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?
(A) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?
(A) 18 (B) 22 (C) 14 (D) 26

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (1)$$
> $$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (2)$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 \quad (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 13839606000 (C) 1386011925 (D) 1383960600

Câu 28. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 29. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(B) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(D) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng

Câu 30. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n ($n \geq 1$) được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
  i := i/2
  a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.
(A) $O(n \log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 32. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 33. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm $n \geq 1$ số nguyên và một số nguyên x.

```
i := 1
while (x^2 ≠ a_i) và (i < n) do
    i := i + 1
if x^2 = a_i then
    return i
return −1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n)$ (D) $O(1)$

Câu 34. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

(A) $f(x)$ là $\omega(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Omega(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 35. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
    ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
    if n > 1
        m := f_{ℓ−1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
        MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
    ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
    i := 1; j := m + 1
    for k := 1 to n do
        if j > n then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else if i > m then
            B[k] := A[j]; j := j + 1
        else if A[i] < A[j] then
            B[k] := A[i]; i := i + 1
        else
            B[k] := A[j]; j := j + 1
    for k := 1 to n do
        A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$ (B) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(C) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$ (D) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$

Câu 36. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay $\diamondsuit$ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) $x \cdot y^4$ (B) y^4 (C) $y \cdot x^4$ (D) x^4

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^5)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 38. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \, P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (7)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (8)\\ &= O(1). && && (9) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n)$ (D) $f(n) = O(n^2)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m+n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **601**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** C	**13.** A	**19.** B	**25.** D	**31.** D	**37.** A
02. B	**08.** D	**14.** C	**20.** C	**26.** C	**32.** C	**38.** D
03. B	**09.** D	**15.** C	**21.** D	**27.** C	**33.** C	
04. B	**10.** C	**16.** D	**22.** A	**28.** B	**34.** B	**39.** A
05. C	**11.** C	**17.** C	**23.** C	**29.** B	**35.** D	
06. B	**12.** B	**18.** B	**24.** D	**30.** B	**36.** C	**40.** D

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **552**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.
(A) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(B) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Chứng minh trên là đúng

Câu 02. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn
(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng

Câu 03. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?
(A) $n+3 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n+4 = 2k+1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n+3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n+4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus Q(x,z))$
(C) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$

Câu 05. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(B) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \forall y\, (xy = 1))$
(C) $\forall x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$
(D) $\exists x\, ((x \neq 0) \to \exists y\, (xy = 1))$

Câu 06. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(B) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(C) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19
(D) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19

Câu 07. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(C) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 08. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$$p = \text{“Tôi đi bơi.”}$$
$$q = \text{“Trời mưa.”}$$

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Tôi không đi bơi khi trời mưa.”

(A) $q \to \neg p$
(B) $p \to q$
(C) $\neg q \to p$
(D) $\neg p \to q$

Câu 09. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

“Nếu x và y là các số thực thì $|x + y| \leq |x| + |y|$.”

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x \, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x \, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x \, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x \, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0, 3)$
(B) $\forall y \, \exists x \, P(x, y)$
(C) $\forall x \, \forall y \, P(x, y)$
(D) $\exists y \, P(4, y)$

Câu 11. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$
(D) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$

Câu 12. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?

(A) $a_n = 3^n + 2^n$
(B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(C) $a_n = n + 3$
(D) $a_n = 3n$

Câu 13. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 101
(B) 100
(C) 102
(D) 103

Câu 14. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \emptyset$
(B) $\emptyset \in \emptyset$
(C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 15. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?

(A) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$

Câu 16. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{\{\}\}$ (B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$ (D) $\emptyset = \{\}$

Câu 17. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?

(A) $f(x) = 4/x$ (B) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ (C) $f(x) = 2^x$ (D) $f(x) = 2x$

Câu 18. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và x chẵn$\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ và $-4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$ (B) Cả ba phát biểu khác đều sai
(C) A là tập hữu hạn (D) $A \subset A$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Cho các quan hệ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ và $g \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ định nghĩa như sau:

$$(x, (x, x, x)) \in f \tag{1}$$
$$((x, y, z), x + y + z) \in g \tag{2}$$

Ở đây $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $f \circ g$ không là toàn ánh và không là đơn ánh (B) $f \circ g$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $f \circ g$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh (D) $f \circ g$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 21. Cho $P(n)$ là phát biểu sau:

"Tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $n = 3a + 4b$."

Hãy chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau về bài toán chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 6$.

(A) Có thể sử dụng quy nạp yếu, và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$ đúng
(B) Với giả thiết quy nạp $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, ta không chứng minh trực tiếp được $P(k+1)$ đúng, và do đó ta không sử dụng quy nạp
(C) Có thể sử dụng quy nạp mạnh
(D) Có vẻ như $P(k) \to P(k+3)$, do đó ta có thể sử dụng quy nạp mạnh và ở bước cơ sở ta có thể chứng minh $P(6)$, $P(7)$, $P(8)$, và $P(9)$ đúng

Câu 22. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng (B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng (D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng
(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

Câu 24. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (6)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (4) và (5) là tương đương

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -1 (B) -2 (C) 0 (D) Không thể tính được

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 4 & (n > 4) \\ a_4 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{10} là bao nhiêu?

(A) 26 (B) 14 (C) 18 (D) 22

Câu 27. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960600 (B) 1383960500 (C) 1386011925 (D) 13839606000

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \quad \text{(Giả thiết quy nạp)} \quad (7)$$
$$= 2^{k+2} - 1. \quad \text{(Biến đổi đại số)} \quad (8)$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^{\log 3})$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 32. Hàm LogicalValue sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), D):
    for x in D do
        for y in D do
            flag := False
            if P(x) = True hoặc P(y) = True then
                flag := True
        if flag = True then
            return True
    return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$ (B) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$
(C) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$ (D) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 34. Thời gian chạy của thuật toán MergeSort được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào dưới đây?

```
MERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n]⟩⟩
  if n > 1
      m := ⌊n/2⌋  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      MERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(n) = T(n/2) + O(1)$ (B) $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
(C) $T(n) = T(n/2) + O(n)$ (D) $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$

Câu 35. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$ (B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$ (D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.
(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. Giả sử $A[1\ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i-1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i·k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post-1)·k+1 ... min(post·k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$
(B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$
(D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(10n/11)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 39. Hàm nào sau đây là $\Theta(n \log n)$?

(A) $23n \log\log n + 3n \log n$
(B) $6n \log n + n^{1.1} + 2$
(C) $5n + 17 \log n$
(D) $2^n \log n + n$

Câu 40. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **552**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. C	**07.** B	**13.** C	**19.** B	**25.** D	**31.** C	**37.** C
02. D	**08.** A	**14.** B	**20.** A	**26.** A	**32.** C	**38.** B
03. A	**09.** D	**15.** D	**21.** B	**27.** D	**33.** B	**39.** A
04. B	**10.** D	**16.** A	**22.** B	**28.** A	**34.** D	**40.** B
05. C	**11.** D	**17.** B	**23.** B	**29.** C	**35.** B	
06. D	**12.** B	**18.** B	**24.** D	**30.** C	**36.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc
Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **889**
Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn muốn chứng minh định lý sau:

"Nếu x và y là các số thực thì $|x+y| \leq |x| + |y|$."

Trong phát biểu định lý ở trên, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?
(A) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?
(A) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(C) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$

Câu 03. Cho $P(x, y)$ là vị từ "$x + 3y = xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.
(A) $\forall y\, \exists x\, P(x, y)$
(B) $\exists y\, P(4, y)$
(C) $P(0, 3)$
(D) $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$

Câu 04. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$
(A) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \leftrightarrow Q(x, z))$
(B) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \oplus Q(x, z))$
(C) $\exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$
(D) $\forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y) \oplus \neg Q(x, z))$

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ "x là bạn của y". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác hai sinh viên là bạn của Tuấn".
(A) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(B) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y\, (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \to (z = y \vee z = x)))$

Câu 06. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $p \to q$ (B) $q \to \neg p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $\neg q \to p$

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

(A) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x))$ (B) $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$

(C) $(\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x\,(P(x) \vee Q(x)) \to (\forall x\,P(x)) \vee (\forall x\,Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

"Tất cả các sinh viên trong lớp trừ Tuấn đều nhiễm COVID-19."

(A) Tuấn và một sinh viên nào đó trong lớp nhiễm COVID-19
(B) Tuấn không nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(C) Tuấn nhiễm COVID-19 hoặc có sinh viên nào đó trong lớp khác Tuấn không nhiễm COVID-19
(D) Tuấn là sinh viên duy nhất trong lớp nhiễm COVID-19

Câu 09. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$ (B) $\exists x \exists y \forall z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y \neq z))$

(C) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (y = z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z\,(P(x,y) \wedge P(x,z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối (B) Cả Alice và Peter đều nói dối

(C) Peter nói thật và Alice nói dối (D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$ (B) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

(C) $\emptyset = \{\{\}\}$ (D) $\emptyset = \{\}$

Câu 12. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(C) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 13. Cho hàm $f : A \to B$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là toàn ánh khi và chỉ khi tồn tại $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(B) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(C) f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $b \in B$ và $a \in A$ sao cho $f(a) = b$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 14. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?

(A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{Z}$ (C) $A = B = \mathbb{N}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 15. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?

(A) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$ (B) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$ (D) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$

Câu 16. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} - (n-3), a_1 = 3$
(B) $a_n = a_{n-1} + (n-1), a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} - (n-1), a_1 = 3$
(D) $a_n = a_{n-1} + (n-3), a_1 = 3$

Câu 17. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a,3), (b,4), (c,3), (d,4)\}$
(B) $f = \{(a,3), (b,3), (c,3), (d,3)\}$
(C) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,2)\}$
(D) $f = \{(a,3), (b,4), (c,2), (d,1)\}$

Câu 18. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?
(A) 75 (B) 80 (C) 73 (D) 78

Câu 19. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3n$ (B) $a_n = n + 3$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (D) $a_n = 3^n + 2^n$

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

Câu 21. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 22. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$ thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

Cho $P(x, y)$ là phát biểu "$x + y$ chia hết cho 5".
Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x, y)$ đúng với mọi cặp $(x, y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 23. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1+n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a,b,c,d, ta có $a+b \geq c+d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1+n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1+0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1+k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1+(k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1+(k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}) \qquad (7)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương

(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

(C) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (5) và (6) là tương đương

(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) -5 (B) -2 (C) 1 (D) -4

Câu 25. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 13839606000 (B) 1383960500 (C) 1383960600 (D) 1386011925

Câu 26. Giả sử trong một chứng minh sử dụng phương pháp quy nạp mạnh, giả thiết quy nạp của chứng minh là một phát biểu như sau:

"(Giả sử) với số nguyên $k \geq 6$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \{4, 5, 6, \ldots, k\}$."

Nếu k là một số nguyên bất kỳ và $k \geq 6$, theo giả thiết quy nạp, kết luận nào sau đây chắc chắn là đúng?

(A) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ chưa chắc là đúng
(B) $P(k-1)$ đúng, nhưng $P(k-2)$ và $P(k-3)$ thì chưa chắc
(C) $P(k-1)$, $P(k-2)$, và $P(k-3)$ đều đúng
(D) $P(k-1)$ và $P(k-2)$ đúng, nhưng $P(k-3)$ thì chưa chắc

Câu 27. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) Không thể tính được

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?

(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(15)$
(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 31. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n^3)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 32. *Dãy Fibonacci* $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là *số Fibonacci thứ* ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \ldots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT được mô tả bởi hệ thức truy hồi nào sau đây?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⟨⟨Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⟩⟩
  if n > 1
      m := f_{ℓ-1}  ⟨⟨Tách thành hai mảng con⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[1...m])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      FIBMERGESORT(A[m+1...n])  ⟨⟨Đệ quy⟩⟩
      MERGE(A[1...n], m)  ⟨⟨Trộn hai mảng con⟩⟩
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  ⟨⟨Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⟩⟩
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
      if j > n then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else if i > m then
          B[k] := A[j]; j := j + 1
      else if A[i] < A[j] then
          B[k] := A[i]; i := i + 1
      else
          B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
      A[k] := B[k]
```

(A) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(f_\ell)$
(B) $T(\ell) = T(\ell-1) + T(\ell-2) + O(1)$
(C) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(\ell)$
(D) $T(\ell) = 2T(\ell/2) + O(1)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(2n) + n \log n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^5)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 34. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $f(x)$ là $o(g(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 35. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := ROOTSEARCH(mileposts, x).
- Trả về ROOTSEARCH($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
ROOTSEARCH(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := ROOTSEARCH(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return ROOTSEARCH(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ROOTSEARCH là?

(A) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (D) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$

Câu 36. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (8)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (9)\\ &= O(1). && && (10) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó
(D) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n \log n)$
(C) $f(n) = O(10n/11)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$ (B) $f(n) = O(n^{2.58})$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 39. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x \cdot y)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$ (B) $O(m)$ (C) $O(m + n)$ (D) $O(m \cdot n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **889**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. B	**07.** D	**13.** B	**19.** C	**25.** D	**30.** B	**36.** B
02. D	**08.** C	**14.** A	**20.** A	**26.** D	**31.** A	**37.** A
03. B	**09.** A	**15.** C	**21.** B	**27.** A	**32.** A	**38.** B
04. B	**10.** A	**16.** B	**22.** C	**28.** D	**33.** B	**39.** C
05. D	**11.** C	**17.** D	**23.** C	**29.** A	**34.** A	**40.** D
06. B	**12.** C	**18.** C	**24.** D		**35.** C	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **690**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho p và q là các mệnh đề sau:

$p =$ "Tôi đi bơi."
$q =$ "Trời mưa."

Hãy chọn biểu thức lôgic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Tôi không đi bơi khi trời mưa."

(A) $q \to \neg p$ (B) $\neg q \to p$ (C) $\neg p \to q$ (D) $p \to q$

Câu 02. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?

(A) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (B) $x \oplus y \oplus z$ (C) $x \vee y \vee z$ (D) $x \wedge y \wedge z$

Câu 03. Giả sử bạn đang xét một mệnh đề có dạng $\exists x \in \mathbb{R}\,(\neg P(x) \wedge Q(x))$. Nếu bạn đang cố gắng chứng minh rằng mệnh đề trên là đúng, bạn cần tìm một số thực a thỏa mãn

(A) $P(a)$ sai và $Q(a)$ đúng
(B) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng
(C) $P(a)$ đúng và $Q(a)$ sai
(D) $P(a)$ sai và $Q(a)$ sai

Câu 04. Với các số thực x và y, số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x\, \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x\, \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều

ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x \wedge y$ (B) $x \leftrightarrow y$ (C) $x \vee y$ (D) $x \oplus y$

Câu 06. Một chứng minh của "Với số nguyên x bất kỳ, tồn tại một số nguyên $y > x$" là:

> Lấy $x = 6$ là số nguyên bất kỳ. Ta chọn $y = 7 > 6$. Do đó, phát biểu trên là đúng.

Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh trên.

(A) Chứng minh trên là đúng
(B) Không thể kết luận chứng minh trên đúng hay sai
(C) Chứng minh trên là sai
(D) Phát biểu đã cho là sai nên không có chứng minh cho phát biểu đó

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) Với mọi mệnh đề p, q, mệnh đề $(p \vee q) \vee (p \to q)$ luôn đúng
(B) Với mọi mệnh đề p, q, nếu p đúng thì mệnh đề $((p \to q) \to p) \to q$ luôn đúng
(C) Cho $P(n)$ là vị từ $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = n(n+1)/2$. Mệnh đề $\forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \to P(n+1)$ luôn đúng
(D) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N}\, (x < y) \not\equiv \exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}\, (x < y)$

Câu 09. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề "$1 = 2$". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

> $$\begin{aligned} 1 &= 2 && \text{(Điều phải chứng minh)} && (1)\\ \Leftrightarrow 2 &= 1 && \text{(Đối xứng)} && (2)\\ \Leftrightarrow 1 + 2 &= 2 + 1 && \text{(Cộng theo vế (1) và (2))} && (3)\\ \Leftrightarrow 3 &= 3. && && (4) \end{aligned}$$
>
> Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 10. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 4, 4 \to 3$
(B) $1 \to 2, 1 \to 3, 2 \to 4, 3 \to 4, 4 \to 1$
(C) $1 \to 3, 2 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 1, 4 \to 2, 4 \to 3$
(D) $1 \to 2, 3 \to 1, 3 \to 2, 4 \to 2, 3 \to 4, 4 \to 3$

Câu 11. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$$

(A) $n \cdot 2^{n+1} - 2$
(B) $(n+1) \cdot 2^n - 2$
(C) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$
(D) $(n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

Câu 12. Cấp số nhân $\{a_n\}$ có $a_2 = 6$ và $a_4 = 24$. Công bội của cấp số nhân này là bao nhiêu?
(A) 4
(B) 2
(C) 1
(D) 3

Câu 13. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(C) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

Câu 14. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^{2} k$$

(A) 100
(B) 101
(C) 103
(D) 102

Câu 15. Trong số các hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sau đây, hàm nào là toàn ánh?
(A) $f(x) = 2^x$
(B) $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$
(C) $f(x) = 4/x$
(D) $f(x) = 2x$

Câu 16. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ $f \subseteq A \times B$ nào sau đây là một hàm có hàm ngược?
(A) $f = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\}$
(B) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 2)\}$
(C) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 2), (d, 1)\}$
(D) $f = \{(a, 3), (b, 4), (c, 3), (d, 4)\}$

Câu 17. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?
(A) $a_n = 2n + 3$
(B) $a_n = n^2$
(C) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$
(D) $a_n = 2^n$

Câu 18. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(B) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(C) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 19. Biểu thức nào là sai?
(A) $\emptyset = \{\{\}\}$
(B) $\emptyset = \{\}$
(C) $\emptyset = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 3\}$
(D) $\emptyset = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Câu 20. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{n}) \mid n \in A \wedge \sqrt{n} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B?
(A) $A = B = \mathbb{N}$
(B) $A = B = \mathbb{Z}$
(C) $A = B = \mathbb{Q}$
(D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 21. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(B) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(C) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$
(D) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24

Câu 22. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$

- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

Câu 23. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

> Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (5)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (7) \end{aligned}$$
>
> Vậy $P(k+1)$ đúng.
>
> Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Không có gì sai trong chứng minh này

(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác

(C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 24. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) -1 (C) 0 (D) -2

Câu 25. Các *số điều hòa (harmonic numbers)* H_n $(n \geq 1)$ được định nghĩa như sau:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên $n \geq 0$, $H_{2^n} \geq 1 + n$" bằng quy nạp.

Bổ đề 1. *Với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$, ta có* $\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \leq 1$.

Bổ đề 2. *Với mọi số thực a, b, c, d, ta có $a + b \geq c + d$ khi và chỉ khi $a \geq c$ và $b \geq d$.*

Từ Bổ đề 1, ta có

$$-\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{i} \geq -1.$$

Gọi $P(n)$ là phát biểu "$H_{2^n} \geq 1 + n$". Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, $H_{2^0} = 1 \geq 1 + 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + k \qquad \text{(Giả thiết quy nạp)} \qquad (8)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} - \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq (1 + (k+1)) - 1 \qquad \text{(Tách tổng)} \qquad (9)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Bổ đề 1 và 2)} \qquad (10)$$

$$\Leftrightarrow H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1) \qquad \text{(Định nghĩa của } H_{2^n}\text{)} \qquad (11)$$

Do đó $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 1 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì Bổ đề 2 không chính xác, do đó không thể kết luận (9) và (10) là tương đương
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở ta cần chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ

Câu 27. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n + 3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$
(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$
(D) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.

(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 29. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(12)$
(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$
(C) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$
(D) $P(15)$

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy hai con ngựa màu trắng liên tiếp, con ngựa tiếp theo cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất hai con ngựa có màu trắng

Câu 31. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n)$
(D) $f(n) = O(10n/11)$

Câu 32. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.

(A) $\log n + 1$ là $O(\log n)$
(B) $\log n^2 + 1$ là $O(\log n)$
(C) 2^{n+1} là $O(2^n)$
(D) 2^{2n} là $O(2^n)$

Câu 33. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$
(B) $O(1)$
(C) $O(n \log n)$
(D) $O(n)$

Câu 34. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^2)$
(B) $O(n^2 \log n)$
(C) $O(n^3)$
(D) $O(n^{\log_4 2})$

Câu 35. Hàm SUPERPOWER sau có đầu vào là một số thực x và một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của x^{4n-2}.

```
SUPERPOWER(x, n):
    if n = 1 then
        return x^2
    y := SUPERPOWER(x, n − 1)
    return ♢
```

Cần thay ♢ bằng biểu thức nào để SUPERPOWER(x, n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) x^4
(B) y^4
(C) $x \cdot y^4$
(D) $y \cdot x^4$

Câu 36. Giả sử $A[1 \ldots n]$ là một mảng đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần ($n \geq 1$). Ta cần tìm chỉ số i thỏa mãn $A[i-1] < x \leq A[i]$. (Bài toán này có thể giải được bằng thuật toán tìm kiếm nhị phân.) Dưới đây là mô tả thuật toán ROOTSEARCH để giải quyết bài toán này:

- Nếu n nhỏ (giả sử, nhỏ hơn 100), tìm chỉ số bằng thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ngược lại:
- Định nghĩa mileposts $:= A[\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[2\lfloor\sqrt{n}\rfloor], A[3\lfloor\sqrt{n}\rfloor], \ldots, A[n]$ là danh sách các phần tử cách đều nhau $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ phần tử trong A.
- Đệ quy, tìm post := RootSearch(mileposts, x).
- Trả về RootSearch($A[(\text{post}-1)\lfloor\sqrt{n}\rfloor, \ldots, \text{post}\lfloor\sqrt{n}\rfloor], x$).

```
RootSearch(A[1...n], x):
  if n < 100 then ⟨⟨Trường hợp cơ sở: mảng nhỏ⟩⟩
      ⟨⟨Tìm kiếm tuyến tính⟩⟩
      for i := 1 to n do
          if A[i − 1] < x ≤ A[i] then
              return i
  ⟨⟨Định nghĩa các cột mốc⟩⟩
  k := ⌊√n⌋
  mileposts := một mảng mới có kích thước ⌈n/k⌉
  for i := 1 to ⌈n/k⌉ do
      mileposts[i] := A[min(i · k, n)]
  ⟨⟨Tìm cột mốc thích hợp⟩⟩
  post := RootSearch(mileposts, x)
  ⟨⟨Tìm kiếm trong đoạn con đã xác định⟩⟩
  return RootSearch(A[(post − 1) · k + 1 ... min(post · k, n)], x)
```

Hệ thức truy hồi cho thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán RootSearch là?

(A) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$ (B) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(n)$
(C) $T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(n)$ (D) $T(n) = T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n})$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 6f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n^{2.58})$ (B) $f(n) = O(n \log n)$ (C) $f(n) = O(n^2)$ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 3T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log 3})$ (B) $O(n^2 \log n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 40. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(x \cdot y)$ (B) $O(y)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **690**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. A	**07.** C	**13.** D	**19.** A	**24.** A	**30.** B	**36.** A
02. C	**08.** B	**14.** D	**20.** D	**25.** B	**31.** B	**37.** A
03. A	**09.** A	**15.** B	**21.** B	**26.** D	**32.** D	**38.** A
04. D	**10.** B	**16.** C	**22.** C	**27.** D	**33.** A	**39.** C
05. B	**11.** C	**17.** A	**23.** D	**28.** B	**34.** B	**40.** C
06. C	**12.** B	**18.** C		**29.** B	**35.** D	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **450**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/7 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho $P(x,y)$ là vị từ "$x+3y=xy$" với các biến xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong số các mệnh đề sau đây.

(A) $P(0,3)$ (B) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (C) $\forall y\,\exists x\,P(x,y)$ (D) $\exists y\,P(4,y)$

Câu 02. Gọi $P(x,y)$ là vị từ "x chơi pickleball với y", trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với "Có ít nhất ba người chơi pickleball"? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(x=z))$ (B) $\exists x\exists y\forall z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y\neq z))$
(C) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y=z))$ (D) $\exists x\exists y\exists z\,(P(x,y)\wedge P(x,z)\wedge(y\neq z))$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

(A) $x\wedge y$ (B) $x\vee y$ (C) $x\oplus y$ (D) $x\leftrightarrow y$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n\in\mathbb{Z}$, nếu $n+3$ là số nguyên lẻ thì $n+4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n+4=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$ (B) $n+3=2k+1$ với $k\in\mathbb{Z}$
(C) $n+4=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$ (D) $n+3=2k$ với $k\in\mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử bạn cần chứng minh bốn phát biểu, đánh số 1, 2, 3, và 4, là tương đương nhau. Danh sách các biểu thức nào sau đây thể hiện rằng bốn phát biểu đã cho là tương đương nhau?

(A) $1\to 2, 1\to 3, 2\to 4, 3\to 4, 4\to 1$ (B) $1\to 3, 2\to 1, 3\to 2, 4\to 1, 4\to 2, 4\to 3$
(C) $1\to 2, 3\to 1, 3\to 2, 4\to 2, 3\to 4, 4\to 3$ (D) $1\to 2, 2\to 1, 3\to 4, 4\to 3$

Câu 06. Cho các vị từ $\text{isDigit}(c)$ = "c là một chữ số thập phân", $\text{isLower}(c)$ = "c là chữ cái thường", và $\text{isUpper}(c)$ = "c là chữ cái viết hoa", trong đó biến c xác định trên tập các ký tự. Công ty X yêu cầu mật khẩu tài khoản đăng nhập của mỗi nhân viên phải là một chuỗi n ký tự $x=x_1x_2\ldots x_n$ có chứa ít nhất một ký tự đặc biệt không là chữ cái hoặc chữ số. Hãy chọn biểu thức lôgic mệnh đề tương đương với yêu cầu của công ty X.

(A) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i) \vee \text{isUpper}(x_i))$
(B) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \wedge \text{isLower}(x_i) \wedge \text{isUpper}(x_i))$
(C) $\exists i \in \{1,\ldots,n\}\,(\neg\text{isDigit}(x_i) \wedge \neg\text{isLower}(x_i) \wedge \neg\text{isUpper}(x_i))$
(D) $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\,(\text{isDigit}(x_i) \vee \text{isLower}(x_i)) \wedge \exists j \in \{1,\ldots,n\}\,\text{isUpper}(x_j)$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?
(A) Peter nói thật và Alice nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Chọn mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(A) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(B) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \leftrightarrow Q(x,z))$
(C) $\exists x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \oplus \neg Q(x,z))$
(D) $\forall x\,\exists y\,\forall z\,(P(x,y) \oplus Q(x,z))$

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân (multiplicative inverse)* của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?
(A) $\forall x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$
(B) $\exists x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(C) $\forall x\,((x \neq 0) \to \exists y\,(xy = 1))$
(D) $\exists x\,((x \neq 0) \to \forall y\,(xy = 1))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x`, `y`, và `z` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức lôgic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...`?
(A) $x \oplus y \oplus z$
(B) $x \wedge y \wedge z$
(C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
(D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số nhân?
(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
(B) $a_n = 3^n + 2^n$
(C) $a_n = 3n$
(D) $a_n = n + 3$

Câu 12. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A, ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A. Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu sai trong số các phát biểu sau.
(A) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
(B) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$
(D) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

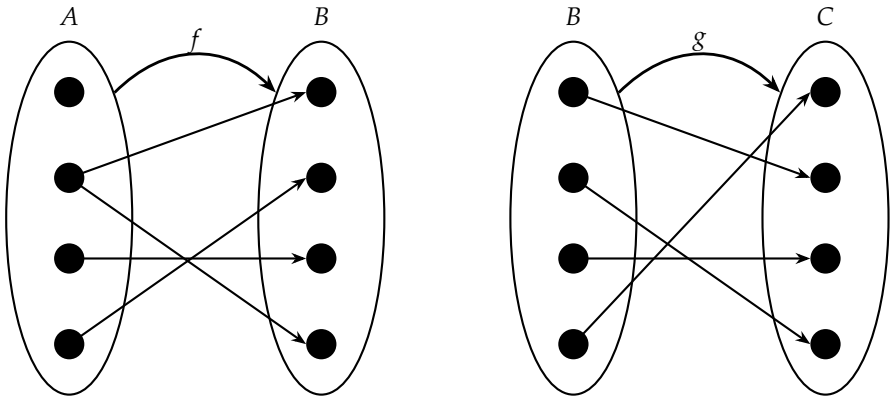
Câu 13. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.
(A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(B) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 14. Cho các tập hợp A, B, và C. Biểu thức nào là sai?
(A) $A - (B \cup C) = (B - C) - A$
(B) $C - (B \cup A) = (C - B) - A$
(C) $A - (B \cup C) = (A - C) - B$
(D) $C - (B \cup A) = (C - A) - B$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{10} \left(\prod_{j=1}^{i} \frac{j}{j+1} \right)$$



Hình 1: Các quan hệ f và g.

(A) 10 (B) $\frac{55}{11}$ (C) 5 (D) $\frac{10}{11}$

Câu 16. Phát biểu nào sau đây về dãy $a_n = 9, 9, 9, 9, 9, \ldots$ $(n \geq 1)$ là đúng?

(A) $\{a_n\}$ vừa là cấp số cộng vừa là cấp số nhân
(B) $\{a_n\}$ không là cấp số cộng và không là cấp số nhân
(C) $\{a_n\}$ là cấp số nhân nhưng không là cấp số cộng
(D) $\{a_n\}$ là cấp số cộng nhưng không là cấp số nhân

Câu 17. Dãy $a_n = 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, \ldots$ $(n \geq 1)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + (n-3)$, $a_1 = 3$ (B) $a_n = a_{n-1} - (n-3)$, $a_1 = 3$
(C) $a_n = a_{n-1} + (n-1)$, $a_1 = 3$ (D) $a_n = a_{n-1} - (n-1)$, $a_1 = 3$

Câu 18. Dãy $\{a_n\}$ $(n \geq 1)$ nào sau đây là cấp số cộng?

(A) $a_n = 2^n$ (B) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (C) $a_n = 2n + 3$ (D) $a_n = n^2$

Câu 19. Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ với $a_1 = 3$ và công sai $d = 5$. Số hạng thứ 15 của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 78 (B) 73 (C) 75 (D) 80

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi con ngựa thứ n có màu trắng, con ngựa thứ $n-2$ và con ngựa thứ $n+2$ cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Một con ngựa thứ k và một con ngựa thứ ℓ nào đó có màu trắng, với k chẵn và ℓ lẻ
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Ít nhất hai con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Một con ngựa thứ k nào đó có màu trắng, với k chẵn

Câu 22. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = n + a_{n-1} - 5 & (n > 1) \\ a_0 = 5 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 1 (B) -4 (C) -5 (D) -2

Câu 23. Cho S là tập hợp các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $(0,0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a,b) \in S$ thì $(a+2,b+3) \in S$ và $(a+3,b+2) \in S$

Cho $P(x,y)$ là phát biểu "$x+y$ chia hết cho 5".

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây về việc chứng minh $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y) \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

(A) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(B) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ và $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(C) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+3,b+2)$ cũng đúng

(D) Ở bước cơ sở, chứng minh $P(0,0)$, $P(2,3)$, và $P(3,2)$ đúng. Ở bước quy nạp, giả sử với cặp $(a,b) \in S$ nào đó, $P(a,b)$ đúng, và chứng minh $P(a+2,b+3)$ cũng đúng

Câu 24. Dãy nào sau đây là định nghĩa đệ quy của dãy $a_n = 4n+3$ $(n \geq 0)$?

(A) $a_n = a_{n-1} + 4n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

(B) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 3$

(C) $a_n = a_{n-2} + 8$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

(D) $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 7$

Câu 25. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh "$\forall n \geq 12\, P(n)$". Ở bước quy nạp, bạn chỉ ra rằng với mọi $k \geq 15$, nếu $P(k-3)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng. Như vậy, ở bước cơ sở, bạn cần chỉ ra các mệnh đề nào là đúng?

(A) $P(15)$

(B) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$

(C) $P(12)$

(D) $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + \dfrac{1}{a_{n-1}} & (n > 1) \\ a_0 = -2, a_1 = 1 \end{cases}$$

Giá trị của a_4 là bao nhiêu?

(A) Không thể tính được (B) 0 (C) -1 (D) -2

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n^2 & (n > 2) \\ a_1 = 1,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 1383960500 (B) 13839606000 (C) 1386011925 (D) 1383960600

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n, $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$" bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 2^0 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} && \text{(Định nghĩa } P(n)\text{)} && (1)\\ &= 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (2)\\ &= 2^{k+2} - 1. && \text{(Biến đổi đại số)} && (3) \end{aligned}$$

  Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}\, P(n)$" đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (2) không chính xác

Câu 29. Phát biểu nào sau đây không thể chứng minh được bằng phương pháp quy nạp?
(A) Với mọi số thực $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 4x + 5 > 0$
(B) Với mọi số nguyên $n \geq 8$, tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn $n = 3a + 5b$
(C) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24
(D) Với mọi số nguyên $n \geq 10$, $2^n \geq n^2$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (n > 2) \\ a_1 = 0, a_2 = 9 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n.
(A) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 3 \cdot 4^n$
(B) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(D) Với mọi số nguyên dương n, $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo.

$$\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, 2n!, 2^n, 3^n, \frac{n^2}{1000000}$$

Hãy chọn đáp án đúng.
(A) $\sqrt{n}\log n, 1000\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(B) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, \frac{n^2}{1000000}, n\log n, 2^n, 3^n, 2n!$
(C) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 2^n, 3^n, 2n!$
(D) $1000\log n, \sqrt{n}\log n, n\log n, \frac{n^2}{1000000}, 3^n, 2^n, 2n!$

Câu 32. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
for x := 0 to 5 do
    for y := 0 to 5 do
        x := x − 1
        y := y + 1
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(y)$ (B) $O(x \cdot y)$ (C) $O(1)$ (D) $O(x)$

Câu 33. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n) - 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(10n/11)$
(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(C) $f(n) = O(n \log n)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 34. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    for j := 2 to m do
        a := a + 1
        b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m+n)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m)$ (D) $O(n)$

Câu 35. Giả sử $T(n)$ thỏa mãn $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Gọi $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp của mệnh đề "$P(n)$ đúng với mọi $n \geq 1$" sau.

> Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \; P(n)$ bằng quy nạp.
>
> - **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
> - **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:
>
> $$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{(Giả thiết)} && (4)\\ &= O(1) + O(1) && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (5)\\ &= O(1). && && (6) \end{aligned}$$
>
> Do đó, $P(k+1)$ đúng.
>
> Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

(A) Chứng minh này là sai vì nếu $f(n)$ và $g(n)$ là các hàm thuộc $O(1)$ thì $f(n) + g(n)$ chưa chắc đã thuộc $O(1)$
(B) Chứng minh này là sai vì các hằng số ẩn trong ký hiệu $O(1)$ ở các biểu thức $T(k) = O(1)$ và $T(k+1) = O(1)$ có thể khác nhau, trong khi chúng cần phải bằng nhau nếu chứng minh là đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp phải là $T(k) = T(k-1) + O(1)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 4T(n/2) + O(n^2)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn.

(A) $O(n^{\log_4 2})$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(n^2 \log n)$

Câu 37. Hàm LOGICALVALUE sau được sử dụng để tính giá trị chân lý của một mệnh đề A có chứa vị từ $P(x)$ và lượng từ. Ở đây x xác định trên miền $\mathcal{D}$ hữu hạn nào đó.

```
LogicalValue(P(x), 𝒟):
  for x in 𝒟 do
      for y in 𝒟 do
          flag := False
          if P(x) = True hoặc P(y) = True then
              flag := True
      if flag = True then
          return True
  return False
```

Mệnh đề nào sau đây tương đương lôgic với A?

(A) $\exists x \in \mathcal{D}\, \forall y \in \mathcal{D}\ (P(x) \wedge P(y))$ (B) $\forall x \in \mathcal{D}\ P(x)$

(C) $\forall x \in \mathcal{D}\, \exists y \in \mathcal{D}\ (P(x) \vee P(y))$ (D) $\exists x \in \mathcal{D}\ P(x)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \ldots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Nếu $a = b^d$, tổng lượng công việc thực hiện ở tất cả các mức của cây đệ quy là?

(A) $O(n^d \log n)$ (B) $O(n^{d+1})$ (C) $O(n \log n)$ (D) $O(n^d)$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ thì kết luận nào sau đây là sai?

(A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
i := n
while i > 0 do
    i := i/2
    a := a + i
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(n \log n)$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KIỂM TRA GIỮA KỲ
HỌC KỲ II, NĂM HỌC 2024-2025
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **450**

Thời gian: **50 phút (không kể thời gian phát đề)**

ĐÁP ÁN

01. D	**07.** C	**13.** D	**18.** C	**24.** C	**30.** A	**36.** D
02. D	**08.** D	**14.** A	**19.** B	**25.** B	**31.** C	**37.** D
03. D	**09.** C	**15.** D	**20.** B	**26.** A	**32.** C	**38.** A
04. B	**10.** D	**16.** A	**21.** A	**27.** C	**33.** B	**39.** C
05. A	**11.** A	**17.** C	**22.** B	**28.** B	**34.** B	**40.** A
06. C	**12.** A		**23.** B	**29.** A	**35.** B	

. . . . . , ngày . . . tháng . . . năm . . .
Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức