VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Lý thuyết đồ thị I

Giới thiệu, Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu, Tính liên thông

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Giới thiệu

- Định nghĩa đồ thị và một số ví dụ
- Định nghĩa và khái niệm
- Đồ thị mới từ đồ thị cũ
- Một số đơn đồ thị đặc biệt

Đồ thị hai phần

- Giới thiệu
- Ghép cặp trong đồ thị

Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu

- Danh sách kề
- Ma trận kề
- Ma trận liên thuộc
- Sự đẳng cấu giữa các đồ thị

Tính liên thông trong đồ thị

- Đường đi
- Liên thông trong đồ thị vô hướng
- Liên thông trong đồ thị có hướng
- Đường đi và sự đẳng cấu
- Đếm số đường đi giữa các đỉnh

- Một *đồ thị (graph)* G bao gồm một tập các *đỉnh (vertex)* hoặc *nút (node)* V và một tập cách *cạnh* E nối các (cặp) đỉnh với nhau
  - Ký hiệu $G = (V, E)$
  - Các ký hiệu $V(G)$ và $E(G)$ cũng được sử dụng để chỉ các tập đỉnh và cạnh của một đồ thị G
- Biểu diễn hình học của đồ thị:
  - Các đỉnh được biểu diễn bằng các vòng tròn nhỏ
  - Mỗi cạnh vô hướng được biểu diễn bằng một đoạn thẳng nối hai đỉnh
  - Mỗi cạnh có hướng được biểu diễn bằng một mũi tên nối hai đỉnh
- Có nhiều thuật ngữ khác nhau và thường không thống nhất

Giới thiệu
Định nghĩa đồ thị và một số ví dụ

- G được gọi là *đồ thị hữu hạn (finite graph)* nếu V là tập hữu hạn và là *đồ thị vô hạn (infinite graph)* nếu V là tập vô hạn. Chúng ta chỉ đề cập đến các đồ thị hữu hạn
- $G = (\emptyset, \emptyset)$ được gọi là *đồ thị rỗng (null graph)*
  - Trong nhiều trường hợp, việc coi $G = (\emptyset, \emptyset)$ là đồ thị hay không phụ thuộc vào ngữ cảnh [Harary and Read 1973]
- Trong nhiều trường hợp, thuật ngữ *đồ thị rỗng (empty graph hoặc edgeless graph)* được sử dụng để chỉ đồ thị $G = (V, \emptyset)$ có ít nhất một đỉnh ($|V| \geq 1$) nhưng không có cạnh
- Thông thường, trừ trường hợp đặc biệt, ta luôn giả thiết *một đồ thị có ít nhất một đỉnh*

Với một tập V, gọi $[V]^k$ là *tập hợp tất cả các tập con k phần tử của V*. (Nói cách khác, $[V]^k$ là tập hợp tất cả các tổ hợp chập k của V)

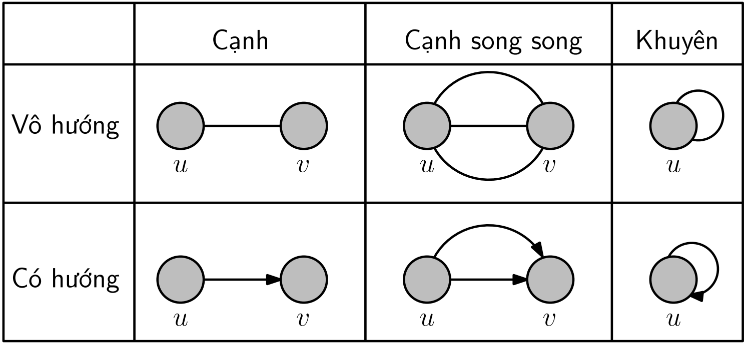
Đồ thị vô hướng

Một *đồ thị vô hướng (undirected graph)* $G = (V, E)$ bao gồm một tập khác rỗng V gồm các *đỉnh (vertex)* (hoặc *nút (node)*), và một tập $E \subseteq [V]^2$ gồm cách *cạnh vô hướng (undirected edge)*.
Mỗi cạnh $e = uv \in E$ (hoặc $e = \{u, v\} \in E$) có hai đỉnh phân biệt $u \neq v$ là các *đầu mút (endpoint)* của e. Ta nói các đỉnh u, v là *liền kề (adjacent)* trong đồ thị G, và cạnh e gọi là cạnh *liên thuộc (incident)* với các đỉnh u, v

Đồ thị có hướng

Một *đồ thị có hướng (directed graph hoặc digraph)* $G = (V, E)$ bao gồm một tập khác rỗng V gồm các *đỉnh (vertex)* (hoặc *nút (node)*) và một tập $E \subseteq V \times V$ gồm các *cạnh có hướng (directed edge)* (hoặc *cung (arc)*).
Mỗi cạnh có hướng $(u, v) \in E$ có một *đỉnh đầu* (*start vertex* hoặc *tail vertex*) u và *một đỉnh cuối* (*end vertex* hoặc *head vertex*) v

Giới thiệu
Định nghĩa đồ thị và một số ví dụ



Hình: Một số loại cạnh trong đồ thị

Giới thiệu

Định nghĩa đồ thị và một số ví dụ

	Loại	Cạnh	Có cạnh song song?	Có khuyên?
1	Đơn đồ thị vô hướng	Vô hướng	Không	Không
2	Đa đồ thị vô hướng	Vô hướng	Có	Không
3	Đa đồ thị vô hướng có khuyên	Vô hướng	Có	Có
4	Đồ thị có hướng	Có hướng	Không	Có
5	Đơn đồ thị có hướng	Có hướng	Không	Không
6	Đa đồ thị có hướng	Có hướng	Có	*Không*[1]
7	Đa đồ thị có hướng và có khuyên	Có hướng	Có	Có
8	Đồ thị hỗn hợp	Cả hai	Có	Có

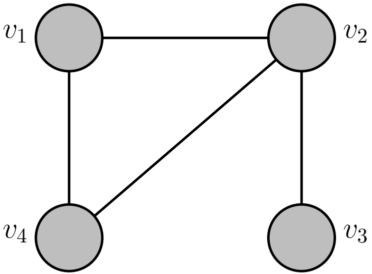
- Định nghĩa đa đồ thị có hướng khác với định nghĩa trong [Rosen 2012]
- Chủ yếu quan tâm đến các đồ thị sau:
  - đơn đồ thị vô hướng (simple, undirected graph)
  - đồ thị có hướng (directed graph hoặc digraph)

[1] Khác với phân loại trong [Rosen 2012]

Ví dụ 1 (Đơn đồ thị vô hướng (simple undirected graph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$$

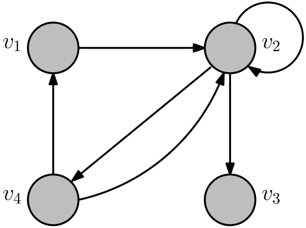


Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có *nhiều nhất một cạnh* nối hai đỉnh phân biệt bất kỳ; và không có *khuyên (loop)*

Ví dụ 2 (Đồ thị có hướng (và có khuyên) (directed graph (with loops)))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$

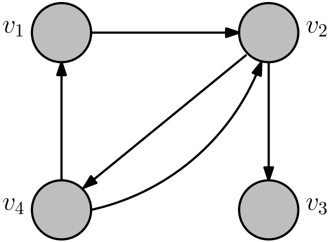


Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có *nhiều nhất một cạnh có hướng* nối từ một đỉnh bất kỳ sang một đỉnh khác bất kỳ; và *có khuyên*

Ví dụ 3 (Đơn đồ thị có hướng (simple directed graph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

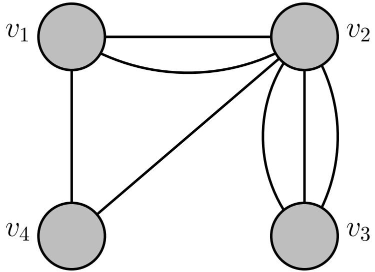
$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$



Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có *nhiều nhất một cạnh có hướng* nối từ một đỉnh bất kỳ sang một đỉnh khác bất kỳ; và *không có khuyên*

Ví dụ 4 (Đa đồ thị vô hướng (undirected multigraph))

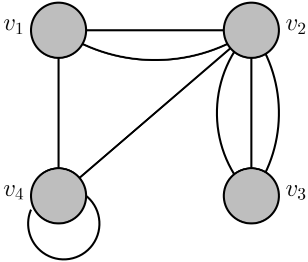
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\}$$
$$m(v_1v_2) = 2,\ m(v_2v_3) = 3$$
$$m(v_1v_4) = m(v_2v_4) = 1$$



Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *không có khuyên*

Ví dụ 5 (Đa đồ thị vô hướng có khuyên (undirected pseudograph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$
$$E = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_4\}$$
$$m(v_1v_2) = 2,\ m(v_2v_3) = 3$$
$$m(v_1v_4) = m(v_2v_4) = m(v_4, v_4) = 1$$

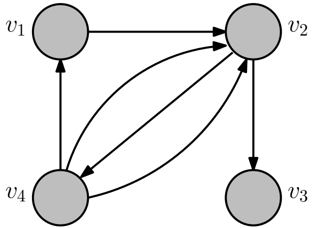


Hình: Chỉ có các cạnh *vô hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *có khuyên* (có thể có nhiều khuyên tại một đỉnh)

Ví dụ 6 (Đa đồ thị có hướng (directed multigraph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$
$$m(v_1, v_2) = m(v_2, v_3) = m(v_2, v_4) = m(v_4, v_1) = 1$$
$$m(v_4, v_2) = 2$$

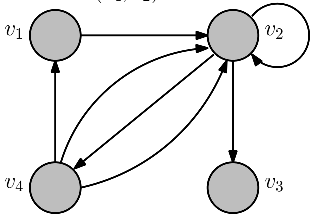


Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *không có khuyên* (khác với định nghĩa trong sách của Rosen)

Ví dụ 7 (Đa đồ thị có hướng và có khuyên (directed pseudograph))

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_2)\}$$
$$m(v_1, v_2) = m(v_2, v_2) = m(v_2, v_3) = m(v_2, v_4) = m(v_4, v_1) = 1$$
$$m(v_4, v_2) = 2$$



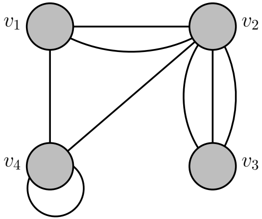
Hình: Chỉ có các cạnh *có hướng*; có thể có *nhiều cạnh* nối giữa hai đỉnh bất kỳ; và *có khuyên* (có thể có nhiều khuyên tại một đỉnh)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng

- Tập hợp các đỉnh kề với đỉnh v của G, ký hiệu $N(v)$, được gọi là *tập láng giềng (neighborhood)* của v.
- Với một tập các đỉnh $A \subseteq V$, ta ký hiệu $N(A)$ để chỉ tập các đỉnh liền kề với ít nhất một đỉnh trong A. Nói cách khác, $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$
- *Bậc (degree)* của một đỉnh v, ký hiệu $\deg(v)$, là số cạnh của G liên thuộc với đỉnh đó. Một khuyên tại đỉnh v (một cạnh nối v với chính nó) đóng góp 2 vào bậc của v

Ví dụ 8

- $N(v_1) = \{v_2, v_4\}$,
  $N(v_2) = \{v_1, v_3, v_4\}$,
  $N(v_3) = \{v_2\}$,
  $N(v_4) = \{v_1, v_2, v_4\}$
- $\deg(v_1) = \deg(v_3) = 3$,
  $\deg(v_2) = 6$, $\deg(v_4) = 4$



- Một đỉnh bậc 0 được gọi là một *đỉnh cô lập (isolated vertex)*
- Một đỉnh bậc 1 được gọi là một *đỉnh treo (pendant vertex)*
- Có thể thêm tên đồ thị vào các ký hiệu để nhấn mạnh đồ thị đang xét: ví dụ, $\deg_G(v)$ là bậc của đỉnh v trong đồ thị G, $N_G(v)$ là tập láng giềng của v trong đồ thị G, và $N_G(A)$ là tập láng giềng của A trong đồ thị G, v.v.

Chú ý

Thường có sự nhầm lẫn rằng $\deg(v) = |N(v)|$ với mọi đỉnh v trong một đồ thị vô hướng G. Chú ý rằng điều này không đúng trong trường hợp G có khuyên hoặc cạnh song song. Nói cách khác, $\deg(v) = |N(v)|$ với mọi đỉnh v trong G khi G là đơn đồ thị vô hướng

Định lý 1: Định lý bắt tay (Handshaking Lemma)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng. Ta có

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Chứng minh.

- Với mỗi cạnh $e = uv \in E$, e được đếm chính xác hai lần trong $\sum_{v \in V} \deg(v)$: một lần trong $\deg(u)$ và một lần trong $\deg(v)$
- Do đó, cả hai vế của đẳng thức trên đều bằng hai lần số cạnh của G

$\square$

Định lý 2

Một đồ thị vô hướng có một số chẵn các đỉnh có bậc lẻ

Chứng minh.

- Gọi V_1 là tập các đỉnh bậc chẵn và V_2 là tập các đỉnh bậc lẻ trong đồ thị vô hướng $G = (V, E)$
- Ta có $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$
  - $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ là một số chẵn, vì V_1 là tập tất cả các đỉnh có bậc chẵn
  - Do đó, $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ là một số chẵn, do $2m$ và $\sum_{v \in V_1} \deg(v)$ đều là số chẵn
  - Do V_2 là tập các đỉnh bậc lẻ, để $\sum_{v \in V_2} \deg(v)$ chẵn, cần phải có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ

Ví dụ 9

Có bao nhiêu cạnh trong một đồ thị vô hướng có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc 6?

Ví dụ 10

Nếu một đồ thị vô hướng có 5 đỉnh thì liệu mỗi đỉnh có thể có bậc 3 hay không?

Bài tập 1

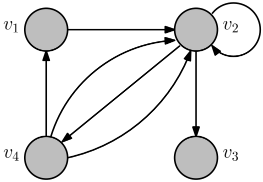
Cho G là một đồ thị vô hướng có n đỉnh và m cạnh. Gọi $\Delta(G)$ và $\delta(G)$ lần lượt là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của một đỉnh của G. Chứng minh rằng $\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

- *Bậc vào (in-degree)* của một đỉnh v, ký hiệu $\deg^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối (tail vertex) là v
- *Bậc ra (out-degree)* của một đỉnh v, ký hiệu $\deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu (head vertex) là v
- Một khuyên ở đỉnh v đóng góp 1 vào bậc vào và 1 vào bậc ra của v

Ví dụ 11

- $\deg^-(v_1) = \deg^-(v_3) = \deg^-(v_4) = 1,$ $\deg^-(v_2) = 4$
- $\deg^+(v_1) = 1,$ $\deg^+(v_2) = \deg^+(v_4) = 3,$ $\deg^+(v_3) = 0$



Định lý 3

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Ta có

$$|E| = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = \sum_{v \in V} \deg^+(v)$$

Chứng minh.

- Mỗi cạnh có hướng $e = (u, v) \in E$ đóng góp 1 vào $\deg^-(v)$ và 1 vào $\deg^+(u)$, với $u, v \in V$
- Do đó, $|E|$ = tổng các bậc vào = tổng các bậc ra

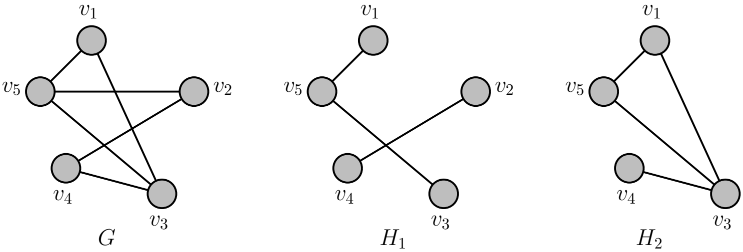
$\square$

Giới thiệu
Đồ thị mới từ đồ thị cũ

Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$

- $H = (W, F)$ là một *đồ thị con (subgraph)* của G (hay G *chứa* H), ký hiệu $H \subseteq G$, nếu $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$. Nếu $W = V$ thì H được gọi là *đồ thị con bao trùm (spanning subgraph)* của G
- $H = (W, F)$ là một *đồ thị con thực sự (proper subgraph)* của G, ký hiệu $H \subset G$, nếu $H \subseteq G$, và $W \subset V$ hoặc $F \subset E$
- $H = (W, F)$ là một *đồ thị con cảm sinh (induced subgraph)* của G nếu $H \subseteq G$ và với mọi cặp đỉnh $u, v \in W$, $uv \in F$ khi và chỉ khi $uv \in E$. Ta cũng nói *H là đồ thị con của G cảm sinh bởi W* và viết $H = G[W]$

Ví dụ 12

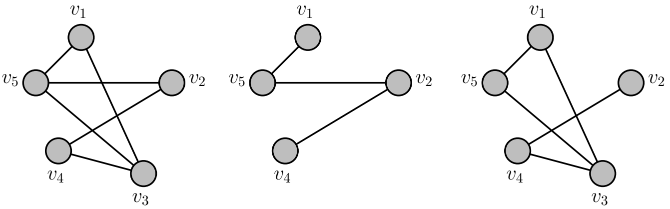


Hình: H_1 là đồ thị con thực sự và là đồ thị con bao trùm của G nhưng không phải đồ thị con cảm sinh. H_2 là đồ thị con thực sự và là đồ thị con cảm sinh của G nhưng không phải đồ thị con bao trùm

Giới thiệu
Đồ thị mới từ đồ thị cũ

Cho đơn đồ thị $G = (V, E)$ vô hướng và các tập $V' \subseteq V$ và $E' \subseteq E$

- Đồ thị $G - V'$ là đồ thị thu được bằng cách *xóa các đỉnh trong V' và các cạnh liên thuộc với chúng*. Với một đỉnh $v \in V'$, ta viết $G - v$ thay vì $G - \{v\}$
- Đồ thị $G - E'$ là đồ thị thu được bằng cách *xóa các cạnh trong E'*. Với một cạnh $e \in E'$, ta viết $G - e$ thay vì $G - \{e\}$



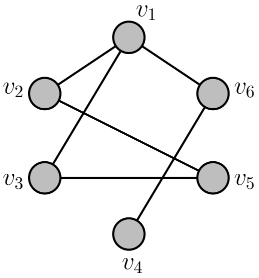
G $\qquad$ $G - v_3$ $\qquad$ $G - v_2v_5$

Giới thiệu

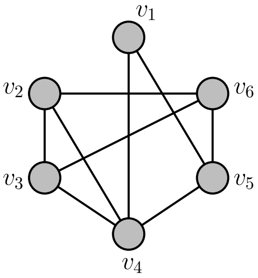
Đồ thị mới từ đồ thị cũ

Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$

- *Đồ thị bù (complement graph)* của G, ký hiệu $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$, là đồ thị có tập đỉnh $\overline{V} = V$ và tập cạnh $\overline{E} = [V]^2 \setminus E = \{uv \mid u, v \in V \text{ và } uv \notin E\}$
- $\overline{G}$ là đồ thị thu được từ G bằng cách *xóa các cạnh trong E* và *thêm các cạnh trong $\overline{E} = [V]^2 \setminus E$*



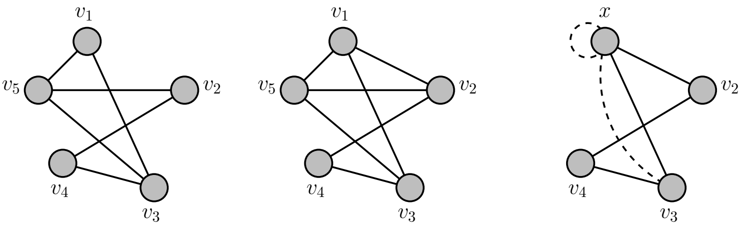
G



$\overline{G}$

Cho đơn đồ thị $G = (V, E)$ vô hướng và tập $E' \subseteq [V]^2 \setminus E$

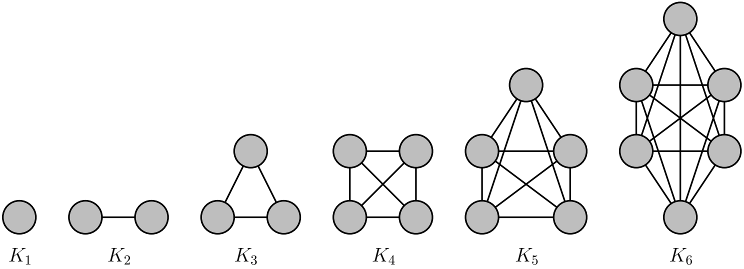
- Đồ thị $G + E'$ là đồ thị thu được bằng cách *thêm các cạnh trong* E'. Với $f \in E'$, ta viết $G + f$ thay vì $G + \{f\}$
- Đồ thị G/e là đồ thị thu được bằng *phép co (contraction) cạnh* $e = uv \in E$
  - gộp hai đỉnh u, v thành một đỉnh mới x, các cạnh kề với u và kề với v chuyển thành cạnh kề với x
  - xóa các khuyên tạo thành sau phép gộp
  - giữ lại một cạnh duy nhất trong số các cạnh song song



G $\quad$ $G + v_1v_2$ $\quad$ G/v_1v_5

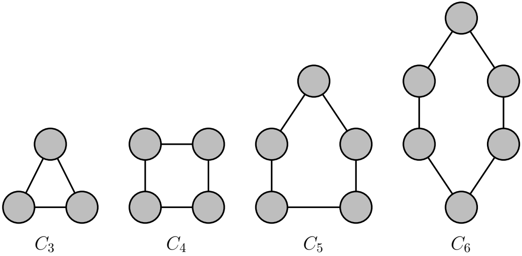
Đồ thị đầy đủ

Đồ thị đầy đủ (complete graph) n đỉnh, ký hiệu K_n, là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt.
Cụ thể, $V(K_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ và $E(K_n) = \{v_iv_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$



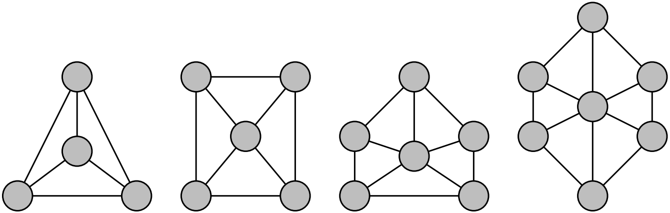
Chu trình

Một *chu trình (cycle)* n đỉnh với $n \geq 3$, ký hiệu C_n, là một đồ thị với tập đỉnh $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ và tập cạnh $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\}$



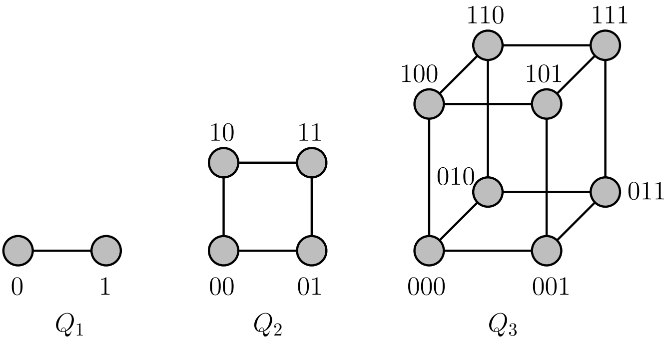
Đồ thị bánh xe

Một *đồ thị bánh xe (wheel)* gồm $n+1$ đỉnh với $n \geq 3$, ký hiệu W_n, là một đồ thị thu được bằng cách thêm một đỉnh mới vào C_n và nối đỉnh đó với mọi đỉnh của C_n bằng các cạnh mới. Cụ thể, $V(W_n) = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{w\}$ ($w \notin \{v_1, \dots, v_n\}$) và $E(W_n) = \{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\} \cup \{w v_i \mid 1 \leq i \leq n\}$



Các khối n chiều

Một *khối n chiều (n-dimensional cube)*, ký hiệu Q_n, là một đồ thị có 2^n đỉnh, mỗi đỉnh được biểu diễn bằng một chuỗi nhị phân độ dài n, và hai đỉnh là liền kề khi và chỉ khi các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng một bit



Bài tập 2

Vẽ các đồ thị sau

(a) K_7

(b) C_7

(c) W_7

(d) Q_4

Bài tập 3

Một đồ thị được gọi là *đồ thị chính quy (regular graph)* nếu các đỉnh của đồ thị có cùng bậc. Ta gọi một đồ thị là d-chính quy nếu nó là đồ thị chính quy trong đó các đỉnh có cùng bậc d. Với các giá trị nào của n thì các đồ thị sau là đồ thị chính quy?

(a) K_n

(b) C_n

(c) W_n

(d) Q_n

Đồ thị hai phần

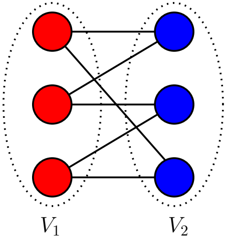
Một đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là một *đồ thị hai phần (bipartite graph)* nếu tồn tại các tập $V_1 \subseteq V$ và $V_2 \subseteq V$ thỏa mãn $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, và mỗi cạnh của G nối một đỉnh thuộc V_1 và một đỉnh thuộc V_2. Ta cũng ký hiệu $G = (V_1, V_2, E)$

Định lý 4

Một đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có ít nhất 2 đỉnh là một đồ thị hai phần khi và chỉ khi có một cách tô màu mỗi đỉnh của G bằng hai màu sao cho không có hai đỉnh kề nhau được tô cùng màu

Ví dụ 13

C_6 là một đồ thị hai phần



- Trong một số tài liệu, các yêu cầu $V_1 \neq \emptyset$ và $V_2 \neq \emptyset$ không được đưa ra trong định nghĩa của đồ thị hai phần (Định nghĩa 1)
- Trong một số tài liệu, Định lý 4 được sử dụng như là định nghĩa của đồ thị hai phần (Định nghĩa 2): Một đồ thị vô hướng G được gọi là *đồ thị hai phần* nếu tồn tại một cách tô màu các đỉnh của G bằng hai màu sao cho không có hai đỉnh kề nhau được tô cùng màu
- Một định nghĩa khác của đồ thị hai phần là như sau (Định nghĩa 3): Một đồ thị vô hướng G được gọi là một *đồ thị hai phần* nếu G không chứa chu trình lẻ nào. Ở đây, một *chu trình lẻ (odd cycle)* là một chu trình có số đỉnh là một số lẻ

Chú ý

Các định nghĩa khác nhau của đồ thị hai phần đôi khi là nguyên nhân của một số mâu thuẫn

Ví dụ, xét đồ thị $G = (V, E)$ chỉ có một đỉnh duy nhất v và không có cạnh nào

- Theo hai định nghĩa đầu tiên, G không phải là một đồ thị hai phần
  - Theo Định nghĩa 1: Giả sử G là đồ thị hai phần. Do $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, và $V = V_1 \cup V_2$, tập V phải có ít nhất hai đỉnh phân biệt, mâu thuẫn với giả thiết G chỉ có một đỉnh duy nhất
  - Theo Định nghĩa 2: Giả sử G là đồ thị hai phần. Do G chỉ có một đỉnh duy nhất, không thể tô màu các đỉnh của đồ thị bằng hai màu khác nhau sao cho không có hai đỉnh kề nhau được tô cùng màu, mâu thuẫn với Định nghĩa 2
- Theo Định nghĩa 3: G là một đồ thị hai phần vì G không chứa chu trình nào

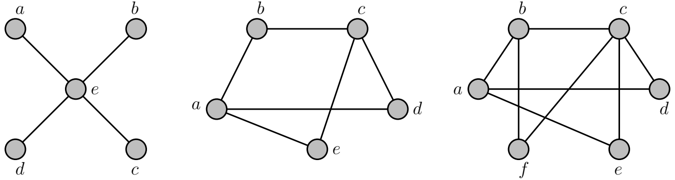
Bài tập 4

Chứng minh K_n không là đồ thị hai phần với mọi $n \geq 3$. (**Gợi ý:** Sử dụng phương pháp phản chứng)

Bài tập 5

(a) Chứng minh Định lý 4

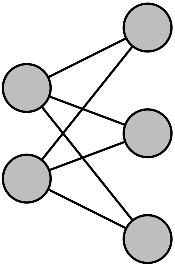
(b) Sử dụng Định lý 4, hãy kiểm tra xem các đồ thị sau có phải đồ thị hai phần hay không



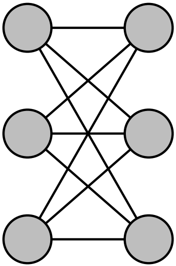
G_1 G_2 G_3

Đồ thị hai phần đầy đủ

Một *đồ thị hai phần đầy đủ (complete bipartite graph)* là một đồ thị hai phần $G = (V_1, V_2, E)$ thỏa mãn điều kiện với mọi $v_1 \in V_1$ và $v_2 \in V_2$ ta có $v_1v_2 \in E$. Nếu $|V_1| = m$ và $|V_2| = n$, ta ký hiệu đồ thị G bằng $K_{m,n}$.



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

Bài tập 6

Các đồ thị sau có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh?

(a) K_n
(b) C_n
(c) W_n
(d) $K_{m,n}$
(e) Q_n

Bài tập 7

Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có $n \geq 3$ đỉnh. Gọi $H = (W, F)$ là một đồ thị con của G có ít nhất hai đỉnh. Chứng minh rằng nếu G là đồ thị hai phần thì H cũng là đồ thị hai phần. Ngược lại, nếu H là đồ thị hai phần thì G có là đồ thị hai phần hay không? Tại sao?

Bài tập 8

Đồ thị W_n có phải là đồ thị hai phần với mọi $n \geq 3$ hay không? Tại sao? (**Gợi ý:** Sử dụng Bài tập 7 và Bài tập 4)

Bài tập 9

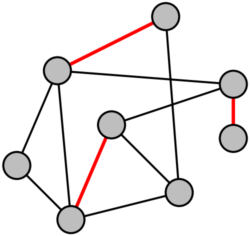
Một đồ thị được gọi là *đồ thị chính quy (regular graph)* nếu các đỉnh của đồ thị có cùng bậc. Chứng minh rằng nếu một đồ thị hai phần $G = (V_1, V_2, E)$ là đồ thị chính quy thì $|V_1| = |V_2|$.

Đồ thị hai phần

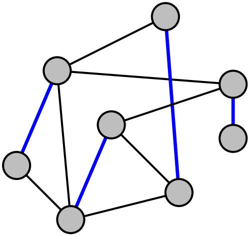
Ghép cặp trong đồ thị

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng

- Một *ghép cặp (matching)* M trong G là một tập con của E thỏa mãn điều kiện không có hai cạnh nào trong M có cùng một đỉnh liên thuộc. Nói cách khác, nếu $uv, st \in M \subseteq E$ thì $\{u, v\} = \{s, t\}$ hoặc $\{u, v\} \cap \{s, t\} = \emptyset$
- Một *ghép cặp cực đại (maximum matching)* trong G là một ghép cặp có số cạnh lớn nhất có thể



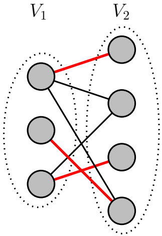
M là một ghép cặp



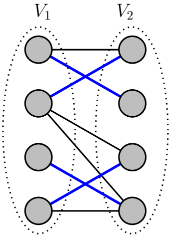
M' là một ghép cặp cực đại

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng

- Ta nói rằng một tập cạnh $W \subseteq E$ *bao phủ (cover)* một tập đỉnh $A \subseteq V$ nếu với mọi đỉnh $u \in A$, tồn tại một cạnh $e \in W$ sao cho e liên thuộc với u, nghĩa là $e = uv$ với đỉnh $v \in V$ nào đó
- Trong một đồ thị hai phần $G = (V_1, V_2, E)$, một *ghép cặp đầy đủ (complete matching)* ứng với V_1 là một ghép cặp $M' \subseteq E$ bao phủ V_1, và một *ghép cặp hoàn hảo (perfect matching)* là một ghép cặp $M^\star \subseteq E$ bao phủ $V = V_1 \cup V_2$



M là một ghép cặp bao phủ V_1



M' là một ghép cặp bao phủ V

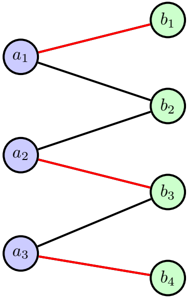
Đồ thị hai phần
Ghép cặp trong đồ thị

Định lý 5: Định lý Hall (Hall's Marriage Theorem)

Cho $G = (V_1, V_2, E)$ là một đồ thị hai phần. Tồn tại một ghép cặp $M \subseteq E$ bao phủ V_1 khi và chỉ khi với mọi $S \subseteq V_1$, $|S| \leq |N_G(S)|$

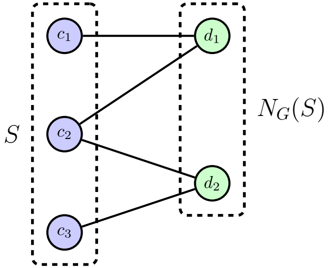
Thỏa mãn điều kiện định lý Hall

$$\forall S \subseteq V_1 : |S| \leq |N_G(S)|$$



Vi phạm điều kiện định lý Hall

$$\exists S \subseteq V_1 : |S| > |N_G(S)|$$



Đồ thị hai phần

Ứng dụng: Bài toán ghép cặp trong y khoa

- Bài toán phân bổ sinh viên y khoa vào các vị trí thực tập tại các bệnh viện ở Hoa Kỳ
- Trước năm 1950: Quá trình tuyển dụng thực tập hỗn loạn, thiếu hiệu quả
  - Bệnh viện cạnh tranh để có được ứng viên tốt nhất
  - Sinh viên buộc phải quyết định quá sớm trước khi có đầy đủ thông tin
  - Nhiều trường hợp sinh viên và bệnh viện đều không hài lòng với kết quả
- Năm 1952: Thành lập National Resident Matching Program (NRMP), chuyên giải quyết các vấn đề liên quan đến việc phân phối các vị trí thực tập

Đồ thị hai phần

Ứng dụng: Bài toán ghép cặp trong y khoa

- Mỗi năm, các bác sĩ nộp một danh sách thứ tự các bệnh viện họ muốn nhận lời làm thực tập, và mỗi bệnh viện nộp một danh sách thứ tự các bác sĩ họ muốn nhận làm thực tập
- NRPM tính ra một ghép cặp giữa các bác sĩ và các bệnh viện thỏa mãn yêu cầu về tính *ổn định (stable)*
- Một ghép cặp được gọi là *không ổn định (unstable)* nếu có một cặp bác sĩ α và bệnh viện B đều sẽ thỏa mãn khi được ghép với nhau hơn là với cách ghép cặp hiện tại
  - α được ghép với bệnh viện A nào đó, trong khi cô/anh ấy thích đến bệnh viện B hơn
  - B được ghép với bác sĩ β nào đó, trong khi bệnh viện thích có α đến làm việc hơn

  Trong trường hợp này, chúng ta gọi cặp (α, B) là một cặp không ổn định trong ghép cặp.
- Mục tiêu của NRPM là tìm một *ghép cặp ổn định (stable matching)*, nghĩa là một ghép cặp không chứa bất kỳ cặp không ổn định nào

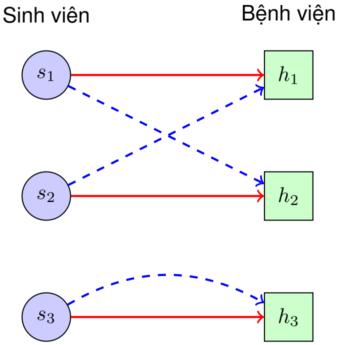
Ví dụ 14 (Ghép cặp ổn định)

Sinh viên và thứ tự ưu tiên:

- s_1: $h_1 > h_2 > h_3$
- s_2: $h_2 > h_1 > h_3$
- s_3: $h_1 > h_3 > h_2$

Bệnh viện và thứ tự ưu tiên:

- h_1: $s_2 > s_1 > s_3$
- h_2: $s_1 > s_3 > s_2$
- h_3: $s_3 > s_1 > s_2$



Ghép cặp ổn định: (s_1, h_1), (s_2, h_2), (s_3, h_3)
Ghép cặp không ổn định: (s_1, h_2), (s_2, h_1), (s_3, h_3)

Đồ thị hai phần

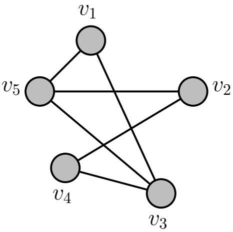
Thuật toán Gale-Shapley

- Từ năm 1952, NRMP đã áp dụng thuật toán “Boston Pool” để phân công các thực tập sinh (tên gọi này là do nó đã được sử dụng trước đó bởi một hiệp hội khu vực ở vùng Boston)
- Năm 1962, David Gale và Lloyd Shapley phát triển *thuật toán ghép cặp ổn định (stable matching algorithm)* [Gale and Shapley 1962] bằng cách mô tả và phân tích chính thức một tổng quát hóa của thuật toán Boston Pool và chứng minh rằng nó tính ra một ghép cặp ổn định
- Các thuật toán tương tự từ đó đã được áp dụng cho nhiều trường hợp cần ghép cặp khác, bao gồm tuyển dụng giảng viên ở Pháp, phân công nhiệm vụ cho thủy thủ Hải quân Hoa Kỳ, các chương trình ghép cặp hiến thận, v.v.
- Shapley được trao giải Nobel Kinh tế năm 2012 cho nghiên cứu của ông về ghép cặp ổn định, cùng với Alvin Roth, người đã mở rộng đáng kể công trình của Shapley và phát triển một số ứng dụng trong thực tế. (Gale không nhận được giải thưởng này, vì ông đã qua đời vào năm 2008)

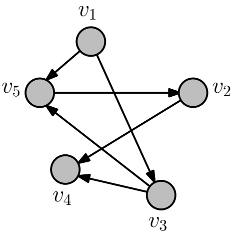
- **Thuật toán Hungarian (Hungarian algorithm) [Kuhn 1955]:** Tìm ghép cặp có tổng trọng số nhỏ nhất trong đồ thị hai phần có trọng số
- **Thuật toán ghép cặp của Edmonds (Edmonds' blossom algorithm) [Edmonds 1965]:** Tìm ghép cặp cực đại trong đồ thị
- **Thuật toán Hopcroft-Karp [Hopcroft and Karp 1973]:** Tìm ghép cặp cực đại trong đồ thị hai phần
- **Thuật toán Ford-Fulkerson [Ford and Fulkerson 1956]:** Tìm luồng cực đại trong mạng

Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu
Danh sách kề

Một *danh sách kề (adjacency list)* biểu diễn một đồ thị không có cạnh song song bằng cách liệt kê các đỉnh liền kề với mỗi đỉnh trong đồ thị



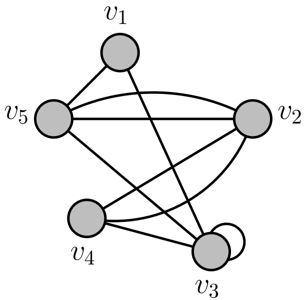
Đỉnh	Các đỉnh liền kề
v_1	v_3, v_5
v_2	v_4, v_5
v_3	v_1, v_4, v_5
v_4	v_2, v_3
v_5	v_1, v_2, v_3



Đỉnh bắt đầu	Đỉnh kết thúc
v_1	v_3, v_5
v_2	v_4
v_3	v_4, v_5
v_4	
v_5	v_2

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. *Ma trận kề (adjacency matrix)* A của G ứng với thứ tự các đỉnh như trên là một ma trận kích thước $n \times n$ trong đó mỗi phần tử a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ được định nghĩa như sau

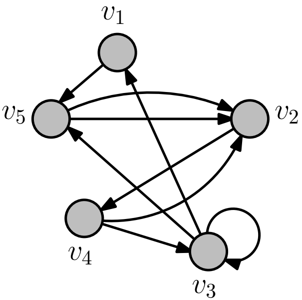
$$a_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{nếu có } m_{ij} \text{ cạnh } v_iv_j \\ 0 & \text{nếu } v_iv_j \notin E \end{cases}$$



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. *Ma trận kề (adjacency matrix)* A của G ứng với thứ tự các đỉnh như trên là một ma trận kích thước $n \times n$ trong đó mỗi phần tử a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ được định nghĩa như sau

$$a_{ij} = \begin{cases} m_{ij} & \text{nếu có } m_{ij} \text{ cạnh } (v_i, v_j) \\ 0 & \text{nếu } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

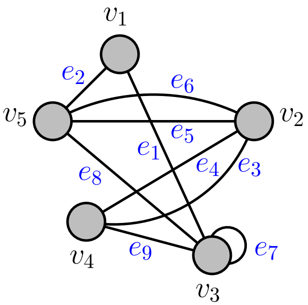


$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu
Ma trận liên thuộc

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và m cạnh $e_1, e_2, \dots, e_m$. *Ma trận liên thuộc (incidence matrix)* A của G tương ứng với thứ tự các đỉnh và cạnh như trên là một ma trận kích thước $n \times m$ trong đó các phần tử a_{ij} ($1 \leq i \leq n$ và $1 \leq j \leq m$) được định nghĩa như sau

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ liên thuộc với đỉnh } v_i \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$



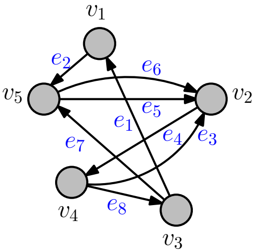
$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Biểu diễn đồ thị và sự đẳng cấu

Ma trận liên thuộc

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng có n đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$ và m cạnh $e_1, e_2, \dots, e_m$. Giả sử G không chứa khuyên. *Ma trận liên thuộc (incidence matrix)* A của G tương ứng với thứ tự các đỉnh và cạnh như trên là một ma trận kích thước $n \times m$ trong đó các phần tử a_{ij} $(1 \leq i \leq n$ và $1 \leq j \leq m)$ được định nghĩa như sau

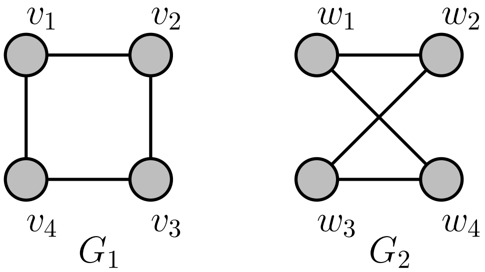
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ có đỉnh đầu là } v_i \\ -1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ có đỉnh cuối } v_i \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sự đẳng cấu

Hai đồ thị vô hướng $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là *đẳng cấu (isomorphic)*, ký hiệu $G_1 \simeq G_2$ hoặc $G_1 \cong G_2$, nếu tồn tại một song ánh $f : V_1 \to V_2$ thỏa mãn điều kiện: với mọi đỉnh $u, v \in V_1$, $uv \in E_1$ khi và chỉ khi $f(u)f(v) \in E_2$

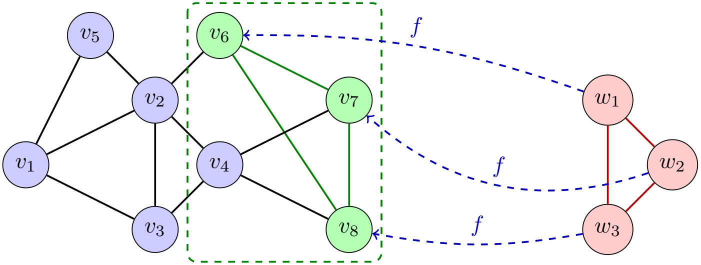


Hình: $G_1 \simeq G_2$ do tồn tại song ánh $f : V_1 \to V_2$ định nghĩa bởi $f(v_i) = w_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ thỏa mãn điều kiện đề ra

Chú ý

Với hai đồ thị phân biệt $G = (V, E)$ và $H = (W, F)$, khi nói *đồ thị H là đồ thị con của đồ thị G* hoặc *G chứa H*, có thể hiểu rằng tồn tại một đồ thị $H' = (W', F')$ thỏa mãn $W' \subseteq V$, $F' \subseteq E$ và $H' \simeq H$. Tương tự với các khái niệm đồ thị con bao trùm, đồ thị con thực sự, đồ thị con cảm sinh, v.v.

$H' = (W', F')$ với $W' \subseteq V$, $F' \subseteq E$

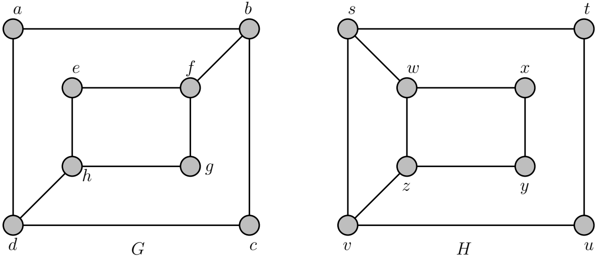


$G = (V, E)$ $H' \simeq H$ (Đẳng cấu) $H = (W, F)$

- Một số tính chất hiển nhiên mà các đồ thị đẳng cấu $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ cần có
  - $|V_1| = |V_2|$
  - $|E_1| = |E_2|$
  - Với mỗi d, số đỉnh bậc d trong G_1 bằng số đỉnh bậc d trong G_2
  - v.v...
- Thông thường, *việc kiểm tra tất cả các song ánh* có thể giữa hai tập đỉnh của hai đồ thị G_1, G_2 để xác định xem chúng có đẳng cấu hay không là *rất khó*: có $n!$ song ánh giữa hai đồ thị n đỉnh
  - Đến hiện tại, *chưa biết* có hay không một *thuật toán trong thời gian đa thức* để kiểm tra xem hai đồ thị là đẳng cấu hay không
  - Thêm nữa, một *bài toán mở trong hàng thập kỷ* là *thiết kế một thuật toán với độ phức tạp trong thời gian xấu nhất tốt hơn thời gian $O(2^{\sqrt{n}})$*. Một bước *đột phá* là kết quả của László Babai [Babai 2016]: thuật toán trong thời gian $2^{O((\log n)^k)}$ với hằng số $k > 1$ cố định nào đó. Thời gian chạy của thuật toán này "tốt hơn" $O(2^{\sqrt{n}})$ nhưng "tệ hơn" thời gian đa thức. Harald Andrés Helfgott chứng minh rằng có thể lấy hằng số $k = 3$

- Để chứng minh hai đồ thị là *không đẳng cấu*, chúng ta thường tìm một tính chất mà chỉ một trong hai đồ thị có. Một tính chất như thế được gọi là một *bất biến đồ thị (graph invariant)* (ví dụ như số các đỉnh có bậc cho trước nào đó, danh sách bậc các đỉnh của đồ thị, v.v...)
- Trên thực tế, có những thuật toán *rất hiệu quả cho phần lớn các đồ thị xuất hiện trong thực hành*
  - Ví dụ, phần mềm "nauty" của Brendan McKay (cho đồ thị vô hướng) và "Traces" của Adolfo Piperno (xem `https://pallini.di.uniroma1.it/`)

Ví dụ 15

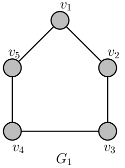


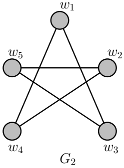
G và H không đẳng cấu

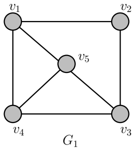
- Do $\deg(a) = 2$, nếu tồn tại một đẳng cấu giữa G và H, a phải tương ứng với một trong bốn đỉnh bậc 2 của H: t, u, x, hoặc y
- Tuy nhiên, mỗi đỉnh trong bốn đỉnh t, u, x, y đều liền kề với một đỉnh bậc hai, trong khi a không thỏa mãn tính chất này trong G

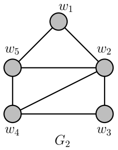
Bài tập 10

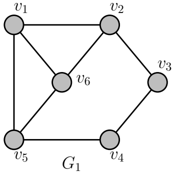
Các cặp đồ thị sau có đẳng cấu hay không? Vì sao?

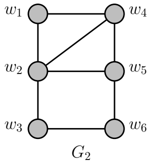












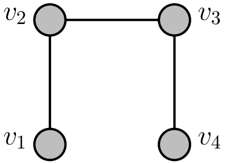
Bài tập 11

Giả sử G và H là các đơn đồ thị thỏa mãn $G \simeq H$. Chứng minh rằng $\overline{G} \simeq \overline{H}$

Bài tập 12

Một đơn đồ thị G được gọi là *tự bù (self-complementary)* nếu $G \simeq \overline{G}$.

(a) Chứng minh rằng đồ thị sau là một đồ thị tự bù



(b) Tìm một đồ thị tự bù có 5 đỉnh.

Tính liên thông trong đồ thị

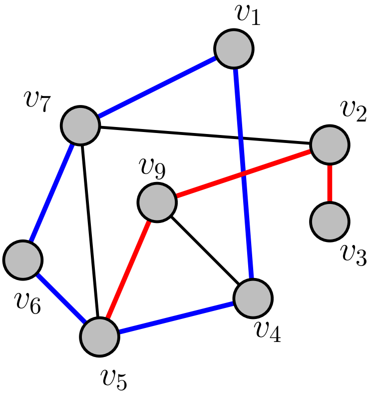
Đường đi

Đường đi (vô hướng)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng và n là một số nguyên dương. *Đường đi (path)* độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trong G là một dãy các cạnh $e_1, e_2, \dots, e_n$ của đồ thị thỏa mãn điều kiện tồn tại một dãy các đỉnh $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ sao cho $v_0 = u$, $v_n = v$, và e_i có các đầu mút v_{i-1} và v_i, với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

- Ta nói rằng đường đi bắt đầu với u và kết thúc với v
- *Độ dài (length)* của một đường đi vô hướng là số cạnh của đường đi đó
- Một đường đi độ dài $n \geq 1$ được gọi là một *chu trình (circuit hoặc cycle)* nếu nó bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh
- Khi G *không có các cạnh song song và khuyên*, mỗi đường đi có thể được xác định một cách duy nhất thông qua các đỉnh của nó, và do đó ta có thể ký hiệu một đường đi bằng dãy các đỉnh của nó $v_0, v_1, \dots, v_n$

Ví dụ 16



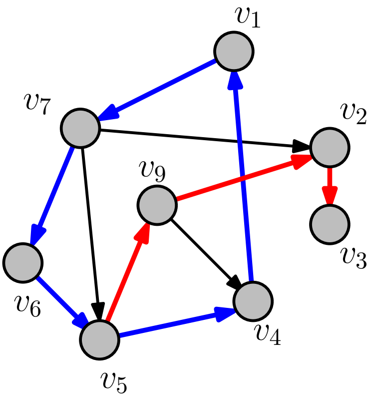
Hình: v_5v_9, v_9v_2, v_2v_3 (hoặc v_5, v_9, v_2, v_3) là một đường đi độ dài 3 và $v_1v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_7v_1$ (hoặc $v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1$) là một chu trình độ dài 5

Đường đi (có hướng)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng và n là một số nguyên dương. *Đường đi (path)* độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trong G là một dãy các cung $e_1, e_2, \dots, e_n$ của đồ thị thỏa mãn điều kiện tồn tại một dãy các đỉnh $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ sao cho $v_0 = u$, $v_n = v$, và e_i có đỉnh đầu v_{i-1} và đỉnh cuối v_i, với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

- Ta nói rằng đường đi bắt đầu với u và kết thúc với v
- *Độ dài (length)* của một đường đi có hướng là số cung của đường đi đó
- Một đường đi độ dài $n \geq 1$ được gọi là một *chu trình (circuit hoặc cycle)* nếu nó bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh
- Khi G *không có các cạnh song song và khuyên*, mỗi đường đi có thể được xác định một cách duy nhất thông qua các đỉnh của nó, và do đó ta có thể ký hiệu một đường đi bằng dãy các đỉnh của nó $v_0, v_1, \dots, v_n$

Ví dụ 17



Hình: $(v_5, v_9), (v_9, v_2), (v_2, v_3)$ (hoặc v_5, v_9, v_2, v_3) là một đường đi độ dài 3 và $(v_1, v_7), (v_7, v_6), (v_6, v_5), (v_5, v_4), (v_4, v_1)$ (hoặc $v_1, v_7, v_6, v_5, v_4, v_1$) là một chu trình độ dài 5

Một *đường đi đơn (simple path)* là một đường đi không chứa cùng một cạnh (cung) nhiều hơn một lần

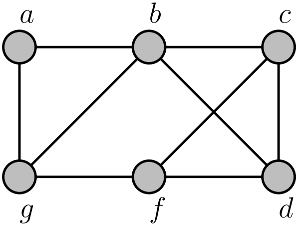
Bài tập 13

Hãy tìm trong đồ thị ở hình bên

(a) Một đường đi có độ dài n với $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$

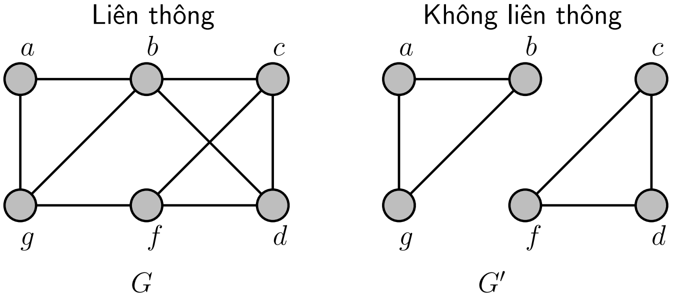
(b) Một đường đi đơn có độ dài n với $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$

(c) Một chu trình có độ dài n với $n \in \{3, \ldots, 7\}$



Một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là *liên thông (connected)* nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của G. Ngược lại, nếu không tồn tại đường đi giữa một cặp đỉnh phân biệt nào đó trong G, ta gọi G là đồ thị *không liên thông (disconnected)*

- Đồ thị có chính xác một đỉnh luôn được coi là liên thông
- Đồ thị không có đỉnh nào (*đồ thị rỗng (null graph)*) không được coi là liên thông



Tính liên thông trong đồ thị

Liên thông trong đồ thị vô hướng

- Một *thành phần liên thông (connected component)* $H = (V', E')$ của G là một *đồ thị con liên thông cực đại* của G, nghĩa là, H là một đồ thị con liên thông của G và với mọi đồ thị con liên thông K khác của G, H không là đồ thị con thực sự của K
- *Hợp (union)* của hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đồ thị $G = (V, E)$ có tập đỉnh $V = V_1 \cup V_2$ và tập cạnh $E = E_1 \cup E_2$. Ta cũng viết $G = G_1 \cup G_2$
- Một *đồ thị không liên thông G* có thể được xem như là *hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông trong đó không có đỉnh chung nào giữa mỗi cặp đồ thị con này*. Các đồ thị con này chính là các thành phần liên thông của G
- G là đồ thị *liên thông* khi và chỉ khi G *có chính xác một thành phần liên thông*

Mệnh đề 6

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng liên thông có ít nhất hai đỉnh. Với hai đỉnh bất kỳ $u, v \in V$ của G, tồn tại một đường đi đơn giữa u và v

Chứng minh.

- Do G liên thông, luôn tồn tại một đường đi giữa hai đỉnh u, v. Gọi $P = e_1, e_2, \dots, e_k$ là một đường đi có độ dài nhỏ nhất trong số tất cả các đường đi giữa u và v. Ta chứng minh P là một đường đi đơn
- Giả sử P không phải đường đi đơn. Suy ra, tồn tại i, j thỏa mãn $0 \leq i < j \leq k$ và $e_i = e_j$. Do đó, $P' = e_1, e_2, \dots, e_i, e_{j+1}, \dots, e_k$ là một đường đi giữa u và v và P' có độ dài nhỏ hơn độ dài k của P. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của P

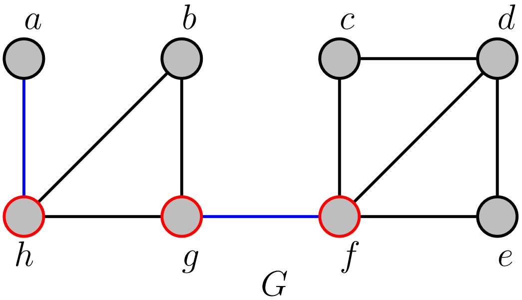
□

Tính liên thông trong đồ thị

Liên thông trong đồ thị vô hướng

Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$

- Một đỉnh $v \in V$ được gọi là *đỉnh cắt (cut vertex)* hoặc *điểm khớp (articulation point)* nếu $G - v$ có nhiều thành phần liên thông hơn G
- Một cạnh $e \in E$ được gọi là *cạnh cắt (cut edge)* hoặc *cầu (bridge)* nếu $G - e$ có nhiều thành phần liên thông hơn G



Hình: Các đỉnh cắt của G là f, g, h. Các cạnh cắt của G là ah, gf

Bài tập 14

Một đồ thị không có đỉnh cắt nào được gọi là *đồ thị không thể tách rời (nonseparable graph)*. Chứng minh rằng mỗi đồ thị sau là đồ thị không thể tách rời

(a) C_n với $n \geq 3$

(b) W_n với $n \geq 3$

(c) $K_{m,n}$ với $m \geq 2$ và $n \geq 2$

(d) Q_n với $n \geq 2$

Bài tập 15

Chứng minh rằng nếu G là đơn đồ thị vô hướng có chính xác hai đỉnh bậc lẻ u, v thì các đỉnh này phải thuộc cùng một thành phần liên thông của G

Bài tập 16

Chứng minh rằng một đồ thị vô hướng liên thông bất kỳ gồm $n \geq 1$ đỉnh có ít nhất $n - 1$ cạnh. (**Gợi ý:** Quy nạp mạnh theo số đỉnh n của đồ thị.)

Bài tập 17

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng liên thông gồm $n \geq 1$ đỉnh và $G \neq K_n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập các đỉnh V' sao cho $G - V'$ là đồ thị không liên thông

- Tập đỉnh V' của một đơn đồ thị vô hướng liên thông G thỏa mãn điều kiện ở Bài tập 17 được gọi là một *tập phân tách (separating set (of vertices))* của G
- *Số liên thông đỉnh (vertex connectivity)* của G, ký hiệu $\kappa(G)$, là *số đỉnh nhỏ nhất cần bỏ đi từ G* để thu được một đồ thị con G' *không liên thông* hoặc *chỉ có một đỉnh*
  - $\kappa(G) = 0$ nếu G không liên thông hoặc chỉ có một đỉnh
  - $\kappa(G)$ là số phần tử nhỏ nhất trong một tập phân tách (nếu có) của G
- G là *k-liên thông (k-connected)* nếu $\kappa(G) \geq k$
  - Nếu G là k-liên thông thì cũng là j-liên thông với mọi $0 \leq j \leq k$
  - Nếu *xóa đi tối đa $k - 1$ đỉnh bất kỳ* từ G thì đồ thị thu được luôn là đồ thị liên thông

Bài tập 18

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng liên thông gồm $n \geq 2$ đỉnh. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập cạnh E' sao cho $G - E'$ là một đồ thị không liên thông

- Tập cạnh E' của một đơn đồ thị vô hướng liên thông G thỏa mãn điều kiện ở Bài tập 18 được gọi là một *tập cạnh phân tách (separating set of edges)* của G
- *Số liên thông cạnh (edge connectivity)* của G, ký hiệu $\lambda(G)$, là *số cạnh nhỏ nhất cần bỏ đi từ G* để thu được một đồ thị con G' *không liên thông* hoặc *chỉ có một đỉnh*
  - $\lambda(G) = 0$ nếu G không liên thông hoặc chỉ có một đỉnh
  - $\lambda(G)$ là số phần tử nhỏ nhất trong một tập cạnh phân tách (nếu có) của G
- G là *k-liên thông cạnh (k-edge connected)* nếu $\lambda(G) \geq k$
  - Nếu G là k-liên thông cạnh thì cũng là j-liên thông cạnh với mọi $0 \leq j \leq k$
  - Nếu *xóa đi tối đa $k - 1$ cạnh bất kỳ* từ G, đồ thị thu được luôn là đồ thị liên thông

Để chứng minh $\kappa(G) = k$ với đơn đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$, cần chứng minh:

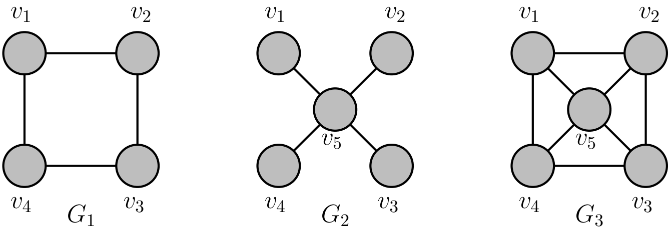
(1) Tồn tại một tập $W \subseteq V$ gồm k đỉnh thỏa mãn $G - W$ không liên thông hoặc chỉ có 1 đỉnh

(2) Với mọi tập $X \subseteq V$ gồm ℓ đỉnh ($\ell < k$), $G - X$ là đồ thị liên thông

Tương tự với $\lambda(G)$.

Bài tập 19

Xác định $\kappa(G_i)$ và $\lambda(G_i)$ trong các đồ thị G_i với $i \in \{1, 2, 3\}$ sau



Bài tập 20

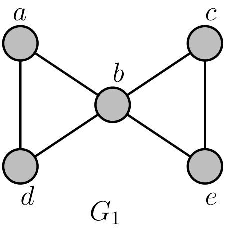
Chứng minh rằng với mọi đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$

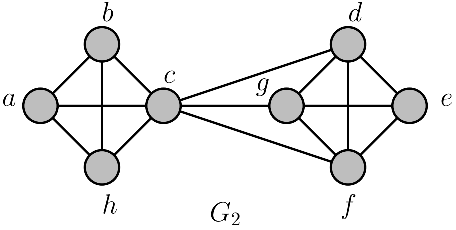
$$\kappa(G) \leq \min_{v \in V} \deg_G(v) \quad (1)$$

$$\lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg_G(v) \quad (2)$$

Bài tập 21

Với mỗi đồ thị G_i ($i \in \{1, 2\}$) sau, tìm $\kappa(G)$, $\lambda(G)$, và $\min_{v \in V} \deg(v)$

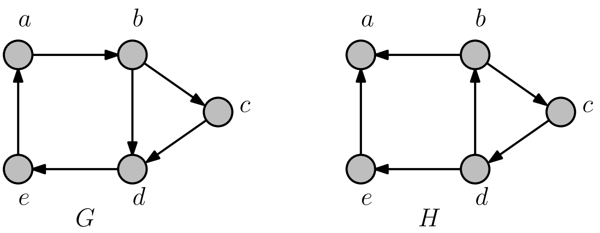




Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

- G được gọi là *liên thông mạnh (strongly connected)* nếu với mỗi cặp đỉnh $u, v \in V$, tồn tại một đường đi có hướng từ u đến v và một đường đi có hướng từ v đến u
- G được gọi là *liên thông yếu (weakly connected)* nếu đồ thị vô hướng thu được bằng cách bỏ qua hướng của các cung của G là một đồ thị liên thông

Ví dụ 18



Hình: G là đồ thị liên thông mạnh. H không là đồ thị liên thông mạnh nhưng là đồ thị liên thông yếu

Tính liên thông trong đồ thị

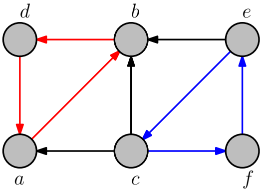
Liên thông trong đồ thị có hướng

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

- Một *thành phần liên thông mạnh (strongly connected component)* của G là một đồ thị con liên thông mạnh cực đại H của G, nghĩa là, H là một đồ thị con liên thông mạnh của G và không là đồ thị con thực sự của bất kỳ đồ thị con liên thông mạnh nào khác

Ví dụ 19

- G không là đồ thị liên thông mạnh
- Đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ với $V_1 = \{a, b, d\}$ và $E_1 = \{(a, b), (b, d), (d, a)\}$ là một thành phần liên thông mạnh của G
- Đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$ với $V_2 = \{c, e, f\}$ và $E_2 = \{(c, f), (f, e), (e, c)\}$ là một thành phần liên thông mạnh của G

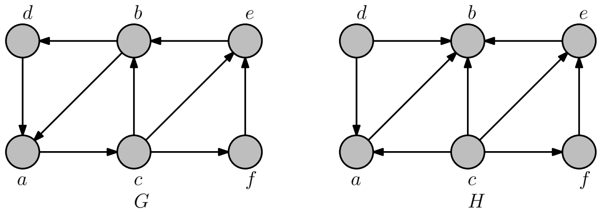


G

Tính liên thông trong đồ thị

Liên thông trong đồ thị có hướng

- Một *đồ thị có hướng không có chu trình (directed acyclic graph – DAG)* là một đồ thị có hướng không chứa khuyên hoặc chu trình có hướng.

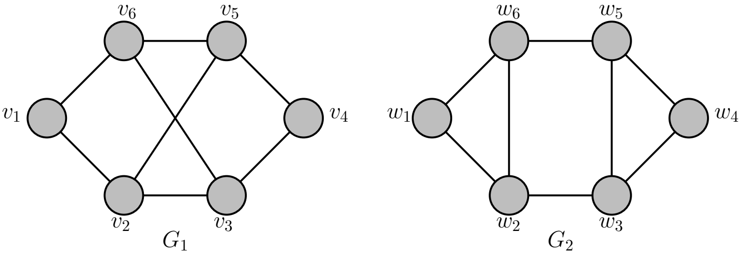


Hình: G là một đồ thị có hướng và có chu trình. H là một đồ thị có hướng và không có chu trình

- **Nhắc lại:** Để chứng minh hai đồ thị là *không đẳng cấu*, chúng ta thường tìm một tính chất mà chỉ một trong hai đồ thị có. Một tính chất như thế được gọi là một *bất biến đồ thị (graph invariant)*
  - số các đỉnh có bậc cho trước nào đó
  - danh sách bậc các đỉnh của đồ thị
- Một bất biến đồ thị hữu ích là *sự tồn tại của các chu trình đơn với độ dài $k \geq 3$*

Bài tập 22

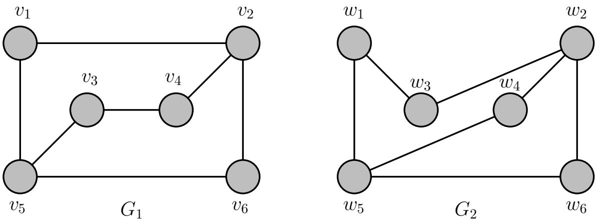
Các đồ thị sau có đẳng cấu không? Vì sao?



- Chúng ta cũng có thể sử dụng đường đi để tìm các ánh xạ giữa hai đồ thị đẳng cấu

Bài tập 23

Các đồ thị sau có đẳng cấu không? Vì sao?



Định lý 7

Cho G là một đồ thị với ma trận kề A tương ứng với thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. Số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j, trong đó r là một số nguyên dương, bằng giá trị của phần tử (i, j) của ma trận A^r.

Chứng minh.

Ta chứng minh Định lý bằng quy nạp theo r

- **Bước cơ sở:** Theo định nghĩa ma trận kề, Định lý 7 đúng với $r = 1$
- **Bước quy nạp:** Giả sử Định lý 7 đúng với mọi $1 \leq r \leq k$. Ta chứng minh Định lý 7 đúng với $r = k + 1$, tức là, số các đường đi khác nhau độ dài $k + 1$ từ v_i tới v_j bằng giá trị của phần tử (i, j) của A^{k+1}.
  - Một đường đi độ dài $k + 1$ từ v_i đến v_j được tạo thành bởi một đường đi độ dài k từ v_i đến v_ℓ nào đó, và cạnh $\{v_\ell, v_j\}$.

Bài tập 24

Tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh phân biệt của K_4 với n bằng

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 5

Bài tập 25

Tìm số đường đi đơn độ dài n giữa hai đỉnh phân biệt của K_4 với n bằng

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 5

Part I

Phụ lục

Nội dung

Một số lỗi thường gặp

Một số ứng dụng của đồ thị

- Đồ thị web và một số mạng lưới tương tự
- Mạng xã hội
- Mạng sinh học
- Thuật toán Gale-Shapley

Một số lỗi thường gặp

Chú ý

Tham khảo từ tài liệu "Common Mistakes in Discrete Mathematics" (https://highered.mheducation.com/sites/dl/free/125967651x/1106131/Common_Mistakes_in_Discrete_Math.pdf)

(a) **Nhầm lẫn giữa một số thuật ngữ trong lý thuyết đồ thị**

- Chẳng hạn như sự khác biệt giữa đường đi (path) và đường đi đơn (simple path). Đây là một trong những trường hợp cần phải ghi nhớ
- Việc tạo ra bảng thuật ngữ riêng trên các thẻ ghi chú hoặc trong một tệp máy tính có thể hữu ích

(b) **Đếm thừa cạnh trong đồ thị do quên chia 2 khi cộng bậc của các đỉnh**

- Mỗi cạnh được đếm hai lần, một lần cho mỗi đầu.

Một số lỗi thường gặp (tiếp)

(c) **Không chắc chắn về việc nên sử dụng mô hình đồ thị nào**
- Nếu mối quan hệ giữa các đối tượng trong tình huống bạn đang mô hình hóa có tính đối xứng, thì đồ thị vô hướng có thể phù hợp; ngược lại, đồ thị có hướng thường phù hợp hơn
- Ví dụ: đường cao tốc nối các thành phố lớn có thể đi theo cả hai hướng, nên đồ thị vô hướng là phù hợp cho mô hình này
- Mối quan hệ săn mồi-con mồi giữa các loài động vật rõ ràng không có tính đối xứng, nên đồ thị có hướng dường như đúng hơn trong trường hợp này

(d) **Sai lầm khi cho rằng nếu hai đồ thị có nhiều thuộc tính giống nhau (bất biến như số đỉnh, số cạnh, v.v.) thì chúng phải đẳng cấu**
- Ví dụ: đồ thị $K_{3,3}$ và đồ thị K_6 đều có 6 đỉnh và 9 cạnh, nhưng chúng không đẳng cấu với nhau

(e) **Nhầm lẫn về các tính chất của đồ thị hai phần**

Một số lỗi thường gặp (tiếp)

- Cho rằng nếu G là một đồ thị hai phần thì nó luôn là đồ thị liên thông
- Cho rằng nếu G có chu trình thì nó không thể là đồ thị hai phần

- Xuất hiện sau sự ra đời của Internet vào đầu những năm 1980
- Mỗi trang web được coi là một đỉnh trong đồ thị $\mathcal{W}$, mỗi liên kết giữa các trang web được coi là một cạnh
- Mặc dù các siêu liên kết (hyperlinks) là các cạnh có hướng, trong một số trường hợp $\mathcal{W}$ có thể được xem như một đồ thị vô hướng
- Đồ thị web $\mathcal{W}$ là một đồ thị thực tế, phát triển liên tục theo thời gian
- Ngoài ra, có những trang web động (ví dụ như đồng hồ trực tuyến) và số lượng các trang như vậy có thể được xem là vô hạn
- Do đó, đồ thị web $\mathcal{W}$ có thể được xem là hữu hạn hoặc vô hạn

Một số tính chất của đồ thị web $\mathcal{W}$ [Zverovich 2021]:

- $\mathcal{W}$ là một đồ thị *khổng lồ* với hàng tỷ đỉnh (ví dụ, xem các cơ sở dữ liệu về đồ thị web ở `https://webgraph.di.unimi.it/`)
- $\mathcal{W}$ là một đồ thị *tương đối thưa thớt (sparse)* vì số cạnh trong $\mathcal{W}$ ít hơn nhiều so với số cạnh có thể có. Cụ thể hơn, bậc trung bình của một đỉnh cố định trong $\mathcal{W}$ không vượt quá một hằng số [Baldi, Frasconi, and Smyth 2003]

$$\text{Bậc trung bình của } \mathcal{W} = \frac{\text{tổng bậc các đỉnh trong } \mathcal{W}}{\text{số đỉnh của } \mathcal{W}}$$

Một số tính chất của đồ thị web $\mathcal{W}$ [Zverovich 2021]:

- Đồ thị web có nhiều "cộng đồng". Một *cộng đồng (community)* là một tập hợp các trang web có cùng mối liên hệ nào đó. Ví dụ, một cộng đồng có thể là một nhóm các trang web liên quan đến một chủ đề cụ thể như thể thao, du lịch, v.v.
    - Có nhiều cách tiếp cận để định nghĩa "cộng đồng" theo ngôn ngữ toán học
    - Một cách là định nghĩa cộng đồng như một đồ thị con có số cạnh nội bộ (nối giữa các đỉnh trong cộng đồng) nhiều hơn số cạnh bên ngoài (nối giữa các đỉnh trong cộng đồng và các đỉnh bên ngoài cộng đồng)
    - Một định nghĩa khác dựa trên *các đồ thị con hai phần có hướng dày đặc (dense directed bipartite subgraphs)* được gọi là *lõi hai phần (bipartite cores)*. Một ví dụ về lõi hai phần là đồ thị hai phần đầy đủ có hướng $K_{3,3}$ với các cạnh có hướng đi từ một phần này sang phần kia, và có thể thêm một số cạnh có hướng vào các phần

Một số tính chất của đồ thị web $\mathcal{W}$ [Zverovich 2021]:

- *Phân phối bậc của $\mathcal{W}$ tuân theo luật lũy thừa với $\gamma = 2.1$* ($\gamma = 2.5$ hoặc 2.7 nếu xét các đồ thị $\mathcal{W}$ có hướng và phân phối bậc ra) và do đó $\mathcal{W}$ cũng được gọi là một *mạng lưới không tỷ lệ (scale-free network)*
  - Trong một đồ thị G có n đỉnh, gọi n_k là số đỉnh có bậc k, và dãy $(n_k, 0 \leq k \leq n-1)$ được gọi là *phân phối bậc (degree distribution)* của G
  - Phân phối bậc của G được gọi là tuân theo *luật lũy thừa (power law)* nếu với mọi bậc $k > 0$, ta có
  $$\frac{n_k}{n} \sim \frac{1}{k^\gamma}, \tag{3}$$
  trong đó $\gamma > 1$ là một hằng số cố định
  - Số $\mathbb{P}(k) = \dfrac{n_k}{n}$ là tỷ lệ các đỉnh có bậc k và có thể được xem như xác suất để một đỉnh có bậc k. (Xác suất để một đỉnh có bậc k là tỷ lệ với $k^{-\gamma}$)
  - Quan hệ tiệm cận (3) áp dụng cho đồ thị vô hạn, và đối với đồ thị hữu hạn nó có nghĩa là 'xấp xỉ bằng': $\mathbb{P}(k) \approx k^{-\gamma}$. Trong trường hợp G là đồ thị có hướng, luật lũy thừa cho phân phối bậc vào và phân phối bậc ra được định nghĩa tương tự
  - Trong các đồ thị khổng lồ tuân theo luật lũy thừa *có các đỉnh với bậc cao*, được gọi là các *trung tâm (hubs)*. Cũng cần lưu ý rằng trong các mạng lưới thực tế, luật lũy thừa có thể có một số sai lệch đối với các đỉnh có bậc rất nhỏ hoặc rất lớn

Một số tính chất của đồ thị web $\mathcal{W}$ [Zverovich 2021]:

- Đồ thị web $\mathcal{W}$ có *tính chất "thế giới nhỏ" (small-world property)* được giới thiệu trong [Watts and Strogatz 1998]
  - Gọi $d(u, v)$ là khoảng cách giữa các đỉnh u và v trong đồ thị vô hướng G, và gọi X là tập hợp tất cả các cặp đỉnh $\{u, v\}$ phân biệt thỏa mãn $d(u, v)$ hữu hạn. *Khoảng cách trung bình (average distance)* của G là:

$$L(G) = \frac{\sum_{\{u,v\} \in X} d(u, v)}{|X|}$$

  - Một tham số tương tự, $L_d(G)$, có thể được định nghĩa cho đồ thị có hướng G, trong đó khoảng cách giữa hai đỉnh là số cạnh trong đường đi ngắn nhất có hướng giữa hai đỉnh đó
  - *Tính chất "thế giới nhỏ" (small-world property)* nói rằng $L(G)$ *(hoặc $L_d(G)$) phải nhỏ hơn nhiều so với số đỉnh trong G: $L(G) \leq c \ln \ln n$, trong đó c là một hằng số nhỏ*. Đối với đồ thị web $\mathcal{W}$, các nghiên cứu [Albert, Jeong, and Barabási 1999]; [Broder et al. 2000] cho thấy $L(\mathcal{W}) = 6.8$, trong khi $L_d(\mathcal{W}) = 16$ *hoặc* 19

Đồ thị web và một số mạng lưới tương tự

Một số mạng lưới tương tự

- *Đồ thị internet (internet graph)* $\mathcal{I}$ có thể được định nghĩa theo nhiều cách khác nhau
  - Ví dụ, các đỉnh của $\mathcal{I}$ có thể đại diện cho các miền (domain) và các cạnh là các kết nối giữa các miền
  - Ngoài ra, các đỉnh của $\mathcal{I}$ có thể là các bộ định tuyến (router) và các cạnh là các kết nối giữa các bộ định tuyến
  - Cả hai loại đồ thị internet này đều tuân theo luật lũy thừa với số mũ $\gamma = 2.5$
- *Đồ thị blog (blog graph)* là một đồ thị con cảm sinh của đồ thị web, trong đó các đỉnh đại diện cho các blog web và các cạnh có hướng là các liên kết giữa các blog. Đồ thị này tuân theo luật lũy thừa với số mũ $\gamma = 2.1$ cho cả phân phối bậc vào và bậc ra, đồng thời có cấu trúc cộng đồng phong phú
- Trong *đồ thị cuộc gọi (call graph)*, các đỉnh đại diện cho các số điện thoại và hai đỉnh được nối với nhau nếu có cuộc gọi từ số này đến số kia trong, chẳng hạn, một ngày. Đồ thị cuộc gọi có hướng cũng tuân theo luật lũy thừa với số mũ $\gamma = 2.1$
- Tìm hiểu thêm về các mạng lưới này trong [Dorogovtsev and Mendes 2003]

Mạng xã hội

- Một trong những mạng xã hội đầu tiên là *đồ thị quen biết (acquaintance graph)*, trong đó mỗi cá nhân được biểu diễn bằng một đỉnh và hai đỉnh được nối với nhau bởi một cạnh nếu các cá nhân tương ứng quen biết nhau.
- *Đường kính (diameter)* của đồ thị G được định nghĩa như sau: $\operatorname{diam}(G) = \max_{u,v \in V} d(u, v)$. Milgram [Milgram 1967] nghiên cứu đồ thị quen biết và kết luận rằng đường kính của nó khoảng sáu, điều này dẫn đến các câu nói quen thuộc *"sáu chặng phân cách" (six degrees of separation)* và *"Trái Đất tròn" (it's a small world)*

Mạng xã hội

- Trong *bài toán quen biết (acquaintance puzzle)* nổi tiếng, cần phải chứng minh rằng trong một nhóm gồm sáu người, sẽ có ba người hoặc là cùng quen biết nhau hoặc là cùng không quen biết nhau. Bài toán quen biết có liên quan chặt chẽ đến các *số Ramsey (Ramsey number)*—khái niệm quan trọng trong *lý thuyết đồ thị cực hạn (extremal graph theory)* (lý thuyết nghiên cứu sự ảnh hưởng của các tính chất tổng quát trong một đồ thị đến các cấu trúc con cục bộ).
  - *Số Ramsey (Ramsey number)* $R_{l,m}$ là số nhỏ nhất sao cho mỗi đồ thị với $R_{l,m}$ đỉnh chứa một đồ thị đầy đủ K_l (trong đó mọi cặp đỉnh nối với nhau) hoặc một tập độc lập (tập hợp các đỉnh mà không có cặp đỉnh nào nối với nhau) m đỉnh
  - *Định lý Ramsey (Ramsey's theorem)* nổi tiếng khẳng định các số Ramsey tồn tại, cụ thể là tồn tại một số nguyên dương nhỏ nhất $R_{l,m}$ sao cho mọi tô màu cạnh xanh-đỏ của đồ thị đầy đủ trên $R_{l,m}$ đỉnh đều chứa một đồ thị đầy đủ K_l màu xanh hoặc một đồ thị đầy đủ K_m màu đỏ.

Mạng xã hội

- Trong *đồ thị hợp tác (collaboration graph)*, các đỉnh đại diện cho các nhà nghiên cứu trong một lĩnh vực nào đó và các cạnh nối các nhà nghiên cứu cộng tác với nhau
- Đồ thị hợp tác của các nhà toán học được biết đến như là *đồ thị hợp tác Erdős* (Erdős collaboration graph), trong đó các đỉnh đại diện cho các nhà toán học và hai đỉnh được nối với nhau nếu hai nhà toán học là đồng tác giả của một bài báo chung (bài báo có thể có các đồng tác giả khác)
- Khoảng cách giữa hai nhà toán học trong đồ thị hợp tác Erdős được gọi là *khoảng cách cộng tác (collaboration distance)*.*Số Erdős (Erdős number)* của một nhà toán học là khoảng cách cộng tác của nhà toán học đó với nhà toán học nổi tiếng Paul Erdős (Erdős (1913–1996) có khoảng 500 đồng tác giả và đã xuất bản ít nhất 1525 bài báo, nhiều hơn bất kỳ nhà toán học nào khác trong lịch sử)
- Newman [Newman 2001] nghiên cứu đồ thị hợp tác cho các nhóm khoa học khác nhau và kết luận rằng một đồ thị hợp tác điển hình F có các tính chất sau: *diam*$(F) \approx 20$ *và* $L(F) \approx 6$

Mạng xã hội

- Một số mạng xã hội được mô hình hóa bằng đồ thị có hướng nếu mối quan hệ giữa các đối tượng thể hiện theo một thứ tự nhất định nào đó; chẳng hạn, nếu một người thấp hơn người khác. Một ví dụ khác là *đồ thị có hướng của các trích dẫn (collaboration graph)* cho tất cả các ấn phẩm trong một lĩnh vực nào đó.
- Một ví dụ khác là *mô hình hóa quan hệ họ hàng* trong một nhóm người: các đỉnh của G là các cá nhân từ nhóm và hai cá nhân x và y được nối với nhau bởi một cạnh có hướng xy nếu x là cha/mẹ của y.
  - Nếu A là ma trận kề của G, thì $A^2 = A \times A$ là ma trận kề của một đồ thị có hướng H. Có thể chứng minh về mặt toán học rằng H biểu diễn mối quan hệ ông bà–cháu trong nhóm người ban đầu. Lưu ý rằng H có thể là một đa đồ thị có hướng nếu không cấm quan hệ cận huyết
  - Ví dụ này có thể được tổng quát hóa hơn nữa cho ma trận kề A^k của đồ thị biểu diễn mối quan hệ tổ tiên qua k thế hệ
- Phân phối bậc của các mạng xã hội *thường tuân theo luật lũy thừa*

Mạng sinh học

- Một *mạng sinh học phân tử (biomolecular network)* bao gồm các đỉnh, đại diện cho các phân tử sinh học (biomolecule), và các cạnh thể hiện sự tương tác giữa chúng
- Các phân tử sinh học có thể là các phân tử lớn (large molecule) (ví dụ: protein, gen) hoặc các phân tử nhỏ (small molecule) (ví dụ: axit nucleic, đường). Chẳng hạn, trong mạng tương tác protein, các cạnh đại diện cho các tiếp xúc vật lý giữa các protein trong một tế bào
- Tương tự như đồ thị web, nhiều mạng tương tác gen, trao đổi chất và protein đều có tính chất "thế giới nhỏ". Nghiên cứu cho thấy đối với một số mẫu, khoảng cách trung bình nằm trong khoảng từ 3 đến 5, và đường kính nhỏ.

Mạng sinh học

- *Một số đỉnh trong một mạng lưới quan trọng hơn những đỉnh khác*; chẳng hạn, các protein cụ thể trong mạng lưới tương tác có thể có ý nghĩa cấu trúc quan trọng hơn. Các *các độ đo trung tâm (centrality measures)* đóng vai trò quan trọng trong việc xác định các đỉnh có "thứ hạng cao".
  - Phân phối bậc của nhiều mạng lưới sinh học đã được chứng minh là tuân theo luật lũy thừa, ví dụ như mạng lưới trao đổi chất và mạng lưới tương tác protein
  - Mạng lưới điều hòa phiên mã (transcriptional regulatory network), là một tập con của mạng lưới điều hòa gen (gene regulatory network), có phân phối bậc ra tuân theo luật lũy thừa, tuy nhiên, phân phối bậc vào tuân theo phân phối hàm mũ
  - Có một số bằng chứng cho thấy bậc của một đỉnh trong mạng lưới tương tác protein chỉ ra khả năng một protein là thiết yếu: các protein không thiết yếu thường có bậc thấp hơn so với bậc của các protein thiết yếu

Mạng sinh học

- Đối với đồ thị liên thông G, *độ lệch tâm (eccentricity)* của một đỉnh u được định nghĩa như sau: $e(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$. Khi đó, *tâm (centre)* của G là tập hợp $\{u \in V : e(u) = \min_{v \in V} e(v)\}$. Nói cách khác, tâm của đồ thị bao gồm các đỉnh có độ lệch tâm nhỏ nhất.
- Trong mạng lưới trao đổi chất, tâm có thể đại diện cho một số thành phần chính của quá trình trao đổi chất của sinh vật và có vai trò như một "nút thắt cổ chai"

Mạng sinh học

- *Độ trung tâm trung gian (betweenness centrality)* là một độ đo khác để định lượng tầm quan trọng của một đỉnh—đỉnh quan trọng thường thuộc về nhiều đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh khác, từ đó kiểm soát "sự liên lạc (communication)" giữa các đỉnh này
  - Gọi σ_{vw} là số đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh v và w trong đồ thị G, và $\sigma_{vw}(u)$ là số đường đi ngắn nhất (v, w) đi qua đỉnh u, trong đó u, v và w đều khác nhau.
  - Độ trung tâm trung gian của u được tính bởi công thức:

$$B(u) = \sum_{v,w \in V, v \neq u \neq w} \frac{\sigma_{vw}(u)}{\sigma_{vw}}$$

  - Ví dụ, trong mạng lưới tương tác protein của men nở (yeast protein interaction network), độ trung tâm trung gian trung bình cho các protein thiết yếu cao hơn nhiều so với các protein không thiết yếu

Thuật toán Gale-Shapley
Giới thiệu

- Bài toán được đặt ra: Ghép cặp giữa các thực tập sinh y khoa và các bệnh viện
- Mỗi bệnh viện có một danh sách ưu tiên về các thực tập sinh
- Mỗi thực tập sinh có một danh sách ưu tiên về các bệnh viện
- Mục tiêu: Tìm một cách ghép cặp sao cho không tồn tại cặp *(bệnh viện, thực tập sinh)* nào đều thích nhau hơn đối tượng hiện tại của họ
- Thuật toán Gale-Shapley (1962) giải quyết bài toán này [Gale and Shapley 1962]

Thuật toán Gale-Shapley

Định nghĩa và Mô tả thuật toán

Ghép cặp ổn định (Stable Matching)

Cho hai tập hợp các đối tượng A và B có cùng kích thước. Mỗi đối tượng trong A và B có danh sách xếp hạng ưu tiên riêng về tất cả các đối tượng trong tập kia. Một ghép cặp M là *ổn định (stable)* nếu không tồn tại cặp (a, b) với $a \in A$ và $b \in B$ sao cho:

(1) a và b không được ghép với nhau trong M
(2) a thích b hơn đối tượng hiện tại của a trong M
(3) b thích a hơn đối tượng hiện tại của b trong M

- Ở mỗi vòng lặp của thuật toán
  - Mỗi bệnh viện chưa ghép đôi gửi đề nghị đến thực tập sinh cao nhất trong danh sách mà họ chưa gửi đề nghị trước đó
  - Mỗi thực tập sinh chọn đề nghị tốt nhất trong số các đề nghị nhận được và từ chối các đề nghị khác
  - Bệnh viện bị từ chối sẽ gửi đề nghị đến ứng viên tiếp theo trong danh sách của họ trong vòng kế tiếp
- Thuật toán kết thúc khi mọi bệnh viện đều được ghép đôi hoặc đã gửi đề nghị đến tất cả ứng viên trong danh sách của họ

Thuật toán Gale-Shapley

Định nghĩa và Mô tả thuật toán

Thuật toán 1: Thuật toán Gale-Shapley (bệnh viện đề xuất)

Input: Danh sách ưu tiên của bệnh viện và thực tập sinh

Output: Tập các cặp ghép đôi ổn định

Khởi tạo tất cả bệnh viện và thực tập sinh đều chưa được ghép đôi

while *có bệnh viện* h *chưa được ghép đôi và* h *chưa gửi đề nghị đến tất cả thực tập sinh* **do**

    $s \leftarrow$ thực tập sinh cao nhất trong danh sách ưu tiên của h mà h chưa gửi đề nghị

    if s *chưa được ghép đôi* **then**

        ghép đôi h và s

    else

        $h' \leftarrow$ bệnh viện hiện tại của s

        if s *thích* h *hơn* h' **then**

            hủy ghép đôi (h', s)

            ghép đôi (h, s)

            đặt h' là chưa được ghép đôi

return *tập các cặp ghép đôi*

Thuật toán Gale-Shapley
Ví dụ minh họa

H_1

$S_1 > S_2 > S_3$

H_2

$S_2 > S_1 > S_3$

H_3

$S_1 > S_3 > S_2$

S_1

$H_2 > H_1 > H_3$

S_2

$H_1 > H_2 > H_3$

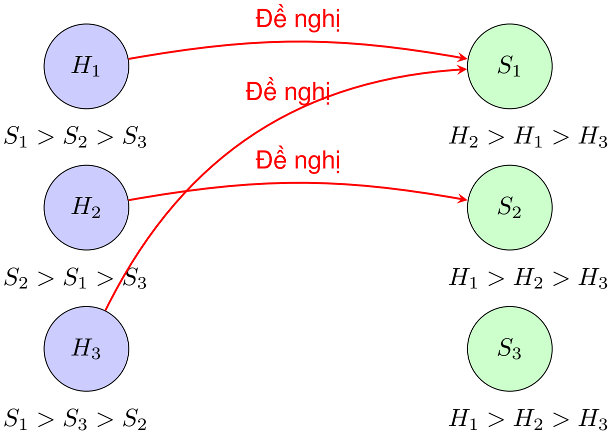
S_3

$H_1 > H_2 > H_3$

Khởi tạo: Mọi bệnh viện (H_i) và thực tập sinh (S_i) đều chưa ghép đôi

Thuật toán Gale-Shapley

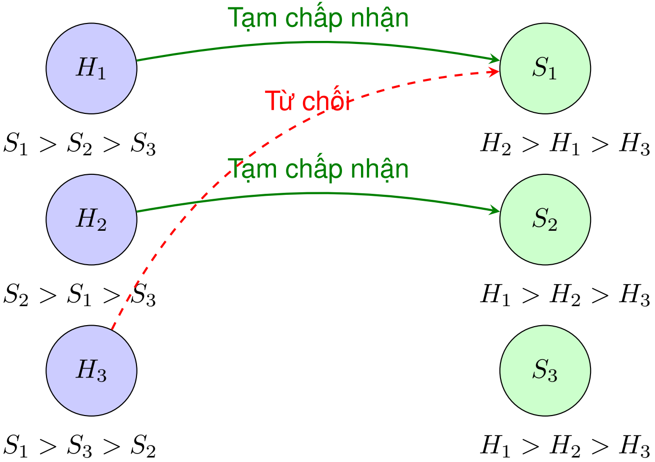
Ví dụ minh họa



Vòng 1: Mỗi bệnh viện gửi đề nghị đến thực tập sinh ưa thích nhất

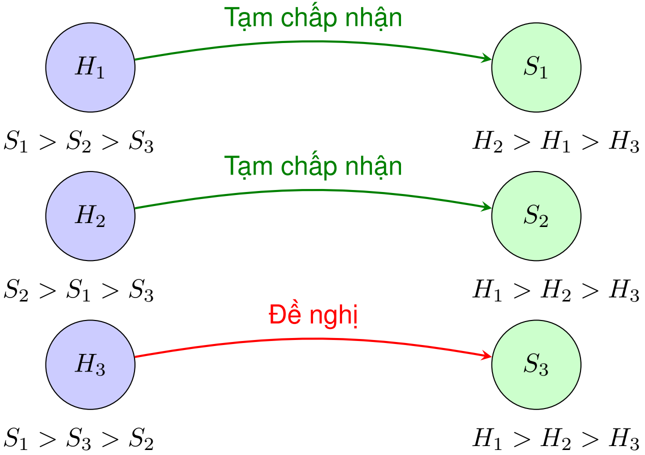
Thuật toán Gale-Shapley

Ví dụ minh họa



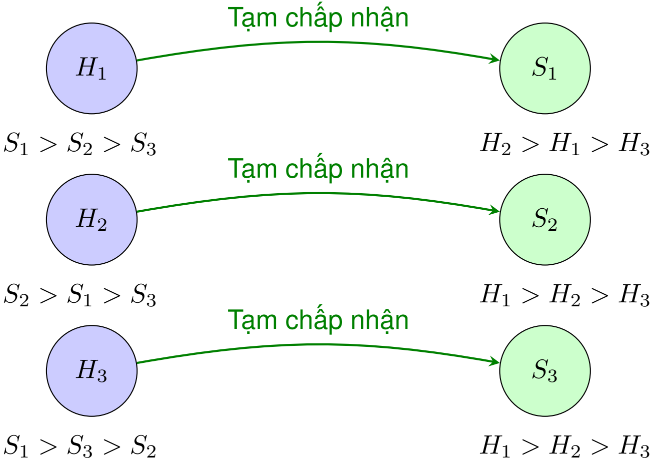
Vòng 1 (tiếp): S_1 chọn H_1 (vì $H_1 > H_3$), S_2 chấp nhận H_2

Thuật toán Gale-Shapley
Ví dụ minh họa



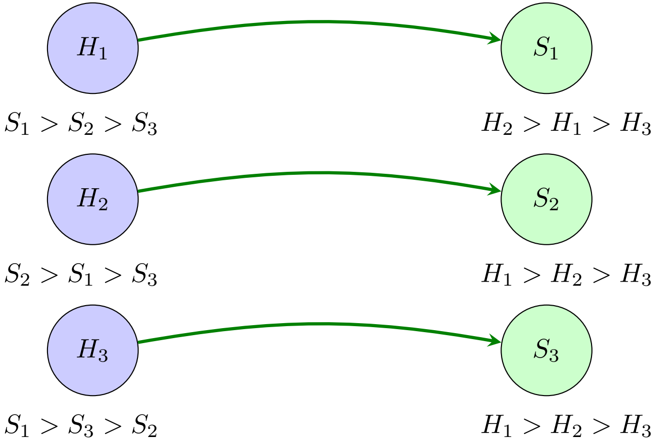
Vòng 2: H_3 bị từ chối, gửi đề nghị đến thực tập sinh thứ 2 là S_3

Thuật toán Gale-Shapley
Ví dụ minh họa



Vòng 2 (tiếp): S_3 chấp nhận H_3 (vì chưa có đề nghị nào khác)

Thuật toán Gale-Shapley
Ví dụ minh họa



Kết quả cuối cùng: (H_1, S_1), (H_2, S_2), (H_3, S_3)

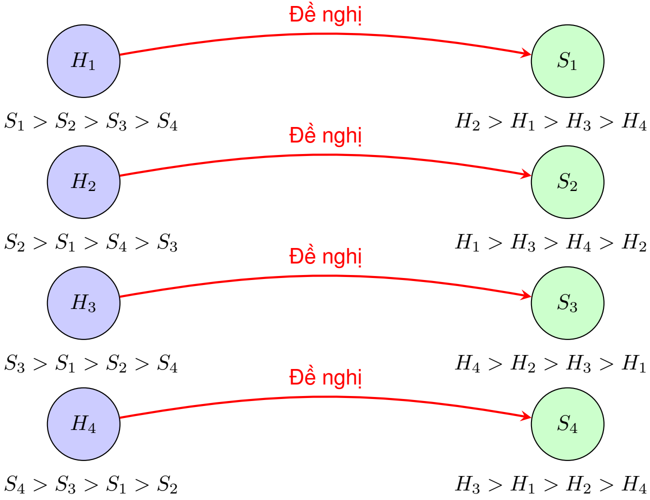
Thuật toán Gale-Shapley
Một ví dụ phức tạp hơn

H_1: $S_1 > S_2 > S_3 > S_4$	S_1: $H_2 > H_1 > H_3 > H_4$
H_2: $S_2 > S_1 > S_4 > S_3$	S_2: $H_1 > H_3 > H_4 > H_2$
H_3: $S_3 > S_1 > S_2 > S_4$	S_3: $H_4 > H_2 > H_3 > H_1$
H_4: $S_4 > S_3 > S_1 > S_2$	S_4: $H_3 > H_1 > H_2 > H_4$

Khởi tạo: Danh sách ưu tiên của các bệnh viện (H_i) và thực tập sinh (S_i)

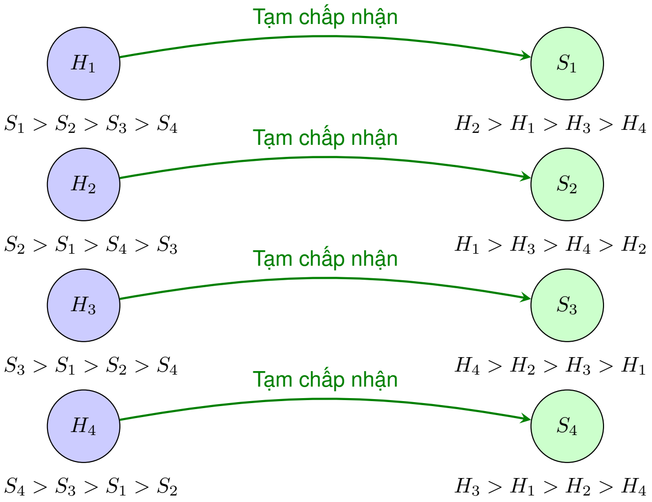
Thuật toán Gale-Shapley

Một ví dụ phức tạp hơn



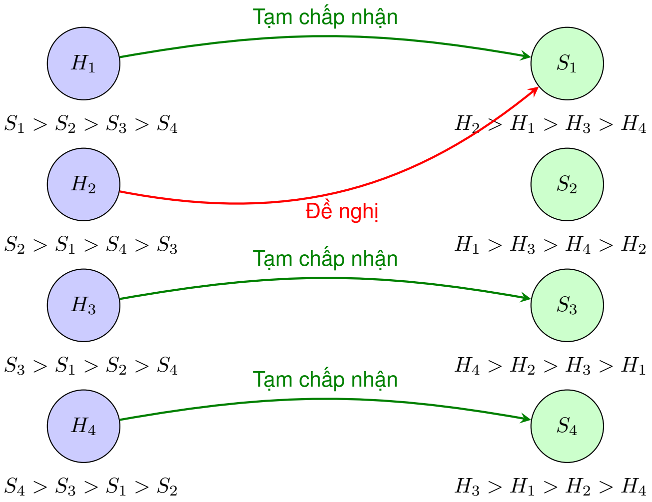
Vòng 1: Mỗi bệnh viện gửi đề nghị đến thực tập sinh ưa thích nhất

Thuật toán Gale-Shapley
Một ví dụ phức tạp hơn



Vòng 1 (tiếp): Tất cả thực tập sinh đều chấp nhận đề nghị

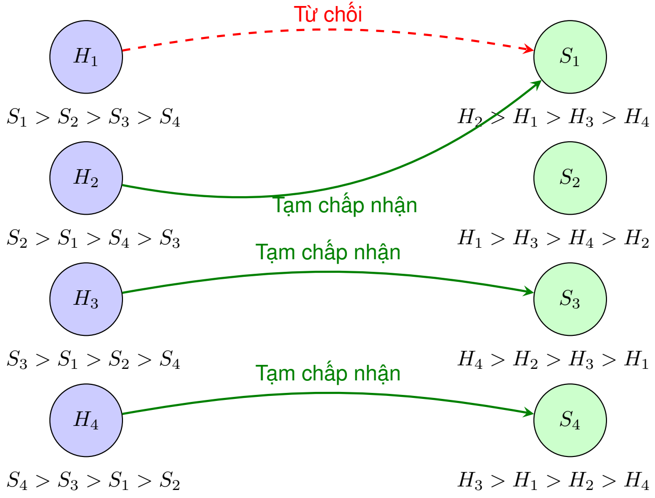
Thuật toán Gale-Shapley
Một ví dụ phức tạp hơn



Vòng 2: H_2 đề nghị với S_1 (vì S_2 đã từ chối H_2)

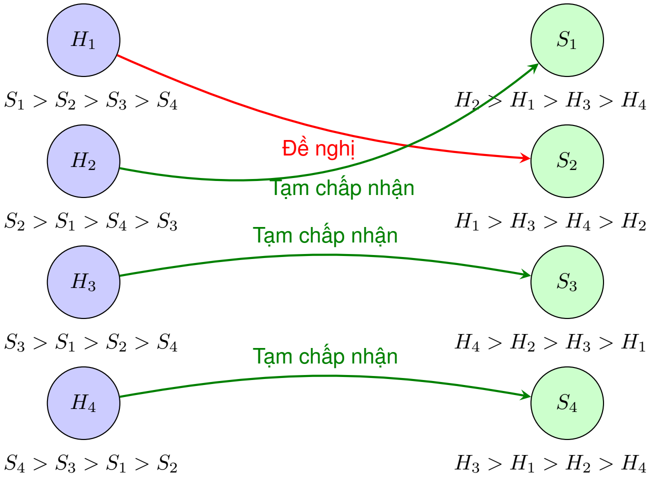
Thuật toán Gale-Shapley

Một ví dụ phức tạp hơn



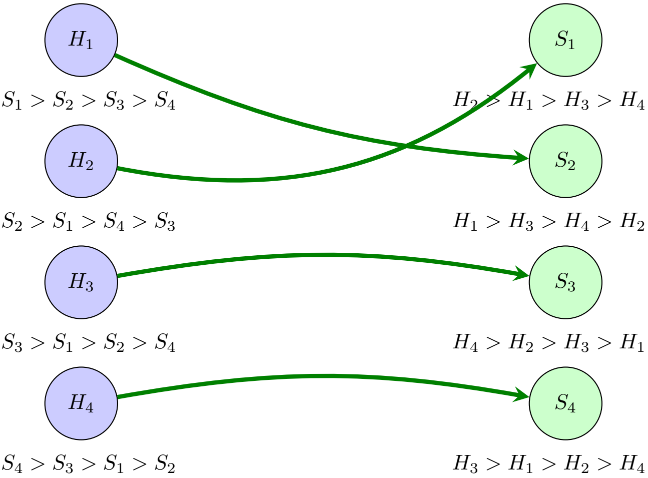
Vòng 2 (tiếp): S_1 thích H_2 hơn H_1 nên chấp nhận H_2 và từ chối H_1

Thuật toán Gale-Shapley
Một ví dụ phức tạp hơn



Vòng 3: H_1 bị từ chối, nên đề nghị với thực tập sinh thứ 2 là S_2

Thuật toán Gale-Shapley
Một ví dụ phức tạp hơn



Kết quả cuối: (H_1, S_2), (H_2, S_1), (H_3, S_3), (H_4, S_4)

Định lý 8: Tính chất của thuật toán Gale-Shapley

1. *Thuật toán luôn kết thúc sau hữu hạn bước*
2. *Kết quả là một cặp ghép ổn định*
3. *Kết quả là cặp ghép ổn định tối ưu cho bên đề xuất (bệnh viện)*
4. *Kết quả là cặp ghép ổn định tệ nhất cho bên được đề xuất (thực tập sinh)*

- Thuật toán Gale-Shapley có độ phức tạp thời gian $O(n^2)$, trong đó n là số lượng thành phần trong mỗi tập hợp
- Được áp dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực: ghép cặp sinh viên với trường đại học, ghép cặp thực tập sinh y khoa với bệnh viện, ...

Tài liệu tham khảo

Zverovich, Vadim (2021). *Modern Applications of Graph Theory*. Oxford University Press. ISBN: 978-0-19-885674-0. DOI: 10.1093/oso/9780198856740.001.0001.

Babai, László (2016). "Graph Isomorphism in Quasipolynomial Time". In: *Proceedings of the Forty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 684–697. DOI: 10.1145/2897518.2897542.

Rosen, Kenneth (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications*. 7th. McGraw-Hill.

Baldi, Pierre, Paolo Frasconi, and Padhraic Smyth (2003). *Modeling the Internet and the Web, Probabilistic Methods and Algorithms*. John Wiley & Sons. ISBN: 978-0-470-84906-4. DOI: 10.1002/047086844X.

Tài liệu tham khảo (tiếp)

Dorogovtsev, S. N. and J. F. F. Mendes (2003). *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*. Oxford: Oxford University Press. ISBN: 9780198515906. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198515906.001.0001.

Newman, Mark E. J. (2001). "The structure of scientific collaboration networks". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 98.2, pp. 404–409. DOI: 10.1073/pnas.98.2.404.

Broder, Andrei, Ravi Kumar, Farzin Maghoul, Prabhakar Raghavan, Sridhar Rajagopalan, Raymie Stata, Andrew Tomkins, and Janet Wiener (2000). "Graph structure in the web". In: *Computer Networks* 33.1-6, pp. 309–320. DOI: 10.1016/S1389-1286(00)00083-9.

Tài liệu tham khảo (tiếp)

- Albert, Réka, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási (1999). "Diameter of the world-wide web". In: *Nature* 401.6749, pp. 130–131. DOI: 10.1038/43601.
- Watts, Duncan J. and Steven H. Strogatz (1998). "Collective dynamics of 'small-world' networks". In: *Nature* 393.6684, pp. 440–442. DOI: 10.1038/30918.
- Harary, Frank and Ronald C. Read (1973). "Is the null graph a pointless concept?" In: *Graphs and Combinatorics*. Proceedings of the Conference at George Washington University. New York, NY: Springer-Verlag.
- Hopcroft, John E. and Richard M. Karp (1973). "An $n^{5/2}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs". In: *SIAM Journal on Computing* 2.4, pp. 225–231. DOI: 10.1137/0202019.

Tài liệu tham khảo (tiếp)

- Milgram, Stanley (1967). “The small world problem”. In: *Psychology Today* 2.1, pp. 60–67.
- Edmonds, Jack (1965). “Paths, trees, and flowers”. In: *Canadian Journal of Mathematics* 17, pp. 449–467. DOI: 10.4153/CJM-1965-045-4.
- Gale, David and Lloyd S. Shapley (1962). “College admissions and the stability of marriage”. In: *The American Mathematical Monthly* 69.1, pp. 9–14. DOI: 10.2307/2312726.
- Ford, L. R. and D. R. Fulkerson (1956). “Maximal flow through a network”. In: *Canadian Journal of Mathematics* 8, pp. 399–404. DOI: 10.4153/CJM-1956-045-5.
- Kuhn, Harold W. (1955). “The Hungarian method for the assignment problem”. In: *Naval Research Logistics Quarterly* 2.1-2, pp. 83–97. DOI: 10.1002/nav.3800020109.