

Một số chú ý

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học
Khoa Toán-Cơ-Tin học
Trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội
`hoanganhduc@hus.edu.vn`

- Với các mã đề có câu “Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?” thì đáp án là 484 ($= 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4$) chứ không phải 1210 như trong đáp án đã công bố.”

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 001

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ (A) Alice nói thật và Peter nói dối
☐ (B) Peter nói thật và Alice nói dối
☐ (C) Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ (D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 02. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ (A) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ (B) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ (C) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ (D) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☐ (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ (B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
☐ (C) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ (D) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ (A) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ (B) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
☐ (C) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
☐ (D) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

(A) $x \wedge y \wedge z$

(B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

(C) $x \vee y \vee z$

(D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 06. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned} p &= \text{"Tàu đến muộn."} \\ q &= \text{"Giám đốc đến đúng giờ."} \\ r &= \text{"Tuần đến công ty trước giám đốc."} \end{aligned}$$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc."

(A) $(p \wedge q) \rightarrow r$

(B) $(p \wedge q) \vee q$

(C) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

(D) $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Câu 07. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

(B) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

(C) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

(D) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

$$\text{"Với mọi } n \in \mathbb{Z}, \text{ nếu } n \text{ là một số nguyên không âm thì } n \leq n^3\text{"}$$

Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

(B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp

(C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo

(D) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

Câu 09. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề "Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ". Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề "Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ "?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

(A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

(B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

(C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

(D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 10. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

(B) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

(C) $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

(D) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Câu 11. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuần là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ " x là bạn của y ". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuần".

- ☐ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \wedge \neg P(y, \text{Tuần}))$
☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuần})))$
☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuần})))$
☐ D $\exists x P(x, \text{Tuần})$

Câu 12. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \leftrightarrow y$
☐ B $x \vee y$
☐ C $x \wedge y$
☐ D $x \oplus y$

Câu 13. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y)$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 14. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ A $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ D $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 15. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)
Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.		

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
☐ C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 16. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☐ A $A \subset A$
☐ B Cả ba phát biểu khác đều sai
☐ C $B \subseteq A$
☐ D A là tập hữu hạn

Câu 17. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 165
☐ B 185
☐ C 195
☐ D 170

Câu 18. Biểu thức nào là sai?

- ☐ A $\emptyset \in \emptyset$
☐ B $\emptyset \in \{\emptyset\}$
☐ C $\emptyset \subseteq \emptyset$
☐ D $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 19. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

(A) 28

(B) 31

(C) 32

(D) 37

Câu 20. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

(A) 103

(B) 101

(C) 102

(D) 100

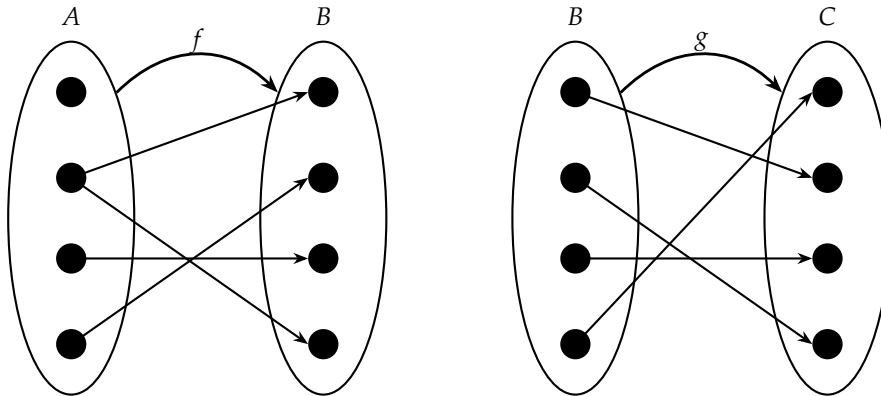
Câu 21. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(B) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(C) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 22. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- (A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{N}$ (C) $A = B = \mathbb{Q}$ (D) $A = B = \mathbb{Z}$

Câu 23. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- (A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh (B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh (D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 24. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 4

Câu 25. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- (A) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$ (B) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
(C) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$ (D) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 832 (B) 340 (C) 468 (D) 398

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- Ⓐ Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
 Ⓑ Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
 Ⓒ Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
 Ⓓ Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- Ⓐ 11 Ⓑ 7 Ⓒ 8 Ⓓ 10

Câu 29. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- Ⓐ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k + 1)$ Ⓑ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j + 1)$ Ⓒ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k + 1)$ Ⓓ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j + 1)$

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- Ⓐ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓑ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓒ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓓ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ B Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
- ☐ C Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ D Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☒ A Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
- ☐ B Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- ☐ C Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- ☐ D Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 33. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☒ A Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- ☐ B Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- ☐ C Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- ☐ D Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 34. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- ☒ A 01
- ☐ B 0
- ☐ C 1
- ☐ D 0101

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) 6071 (B) -6071 (C) 6067 (D) -6067

Câu 36. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
 (B) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
 (C) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
 (D) $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- (A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
 (B) $f(n) = O(n \log n)$
 (C) $f(n) = O(-10n/11)$
 (D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```

MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
     $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$  $\rangle\rangle$ 
    if  $n > 1$ 
         $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con $\rangle\rangle$ 
        MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy $\rangle\rangle$ 
        MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy $\rangle\rangle$ 
        MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con $\rangle\rangle$ 
    
```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
     $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$  $\rangle\rangle$ 
     $i := 1; j := m+1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
        if  $j > n$  then
             $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
        else if  $i > m$  then
             $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
        else if  $A[i] < A[j]$  then
             $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
        else
             $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
         $A[k] := B[k]$ 
    
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(n \log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(\log n)$ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

```

COMPUTESUM( $n$ ):
    if  $n = 1$  then
        return 3
     $y := \text{COMPUTESUM}(n-1)$ 
    return  $\diamond$ 
    
```

Cần thay $\diamond$ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

- (A) $(y+2)y^2$ (B) $y+n$ (C) y (D) $y+(n+2)n^2$

Câu 40. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- ☐ A Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ không là $O(g(x)/2)$
- ☐ B Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ không là $O(f(x)/2)$
- ☐ C Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ là $O(g(x)/2)$
- ☐ D Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ là $O(f(x)/2)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 001

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☐ C	07. ☐ D	13. ☐ A	19. ☐ B	25. ☐ A	31. ☐ C	36. ☐ B
02. ☐ B	08. ☐ B	14. ☐ B	20. ☐ C	26. ☐ A	32. ☐ C	37. ☐ B
03. ☐ A	09. ☐ A	15. ☐ C	21. ☐ B	27. ☐ A	33. ☐ D	38. ☐ A
04. ☐ B	10. ☐ B	16. ☐ B	22. ☐ A	28. ☐ A	34. ☐ A	39. ☐ D
05. ☐ C	11. ☐ C	17. ☐ B	23. ☐ C	29. ☐ C	35. ☐ B	40. ☐ C
06. ☐ C	12. ☐ A	18. ☐ A	24. ☐ B	30. ☐ A		

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 002

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ (B) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ (C) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ (D) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Câu 02. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề " $1 = 2$ ". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------|-----|
| $1 = 2$ | (Điều phải chứng minh) | (1) |
| $\Leftrightarrow 2 = 1$ | (Đối xứng) | (2) |
| $\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$ | (Cộng theo vế (1) và (2)) | (3) |
| $\Leftrightarrow 3 = 3.$ | | (4) |

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- ☐ (A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
☐ (B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
☐ (C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
☐ (D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 03. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu "Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ " bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ (A) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
☐ (B) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ (C) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ (D) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Câu 04. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ (B) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
☐ (C) $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
☐ (D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 05. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Cả Alice và Peter đều nói dối
 ☐ B Peter nói thật và Alice nói dối
- ☐ C Cả Alice và Peter đều nói thật
 ☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 06. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
 (B) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
 (C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
 (D) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ (B) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
 (C) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng (additive inverse)* của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- (A)** $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- (A) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
 (B) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
 (C) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
 (D) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 10. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (*multiplicative inverse*) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- (A) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
 (B) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
 (C) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
 (D) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 11. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ **A** $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ **B** $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
☐ **C** $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
☐ **D** $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$

Câu 12. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{"Tàu đến muộn."}$
 $q = \text{"Giám đốc đến đúng giờ."}$
 $r = \text{"Tuần đến công ty trước giám đốc."}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

- A $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
B $(p \wedge q) \rightarrow q$
C $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$
D $(p \wedge q) \vee q$

Câu 13. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$
☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
- ☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$
☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 14. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
- ☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 15. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
- ☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
- ☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
- ☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- ☐ A 43750
 ☐ B 42525
 ☐ C 44200
 ☐ D 43800

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- ☐ A 1
 ☐ B 3
 ☐ C 4
 ☐ D 2

Câu 18. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
 ☐ B f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
 ☐ C f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
 ☐ D f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 19. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 185
 ☐ B 165
 ☐ C 170
 ☐ D 195

Câu 20. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

(A) 103

(B) 101

(C) 102

(D) 100

Câu 21. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

(B) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

(C) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

(D) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

Câu 22. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 1

(B) 4

(C) 3

(D) 2

Câu 23. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

(A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

(B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

(C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

(D) R là quan hệ tương đương

Câu 24. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

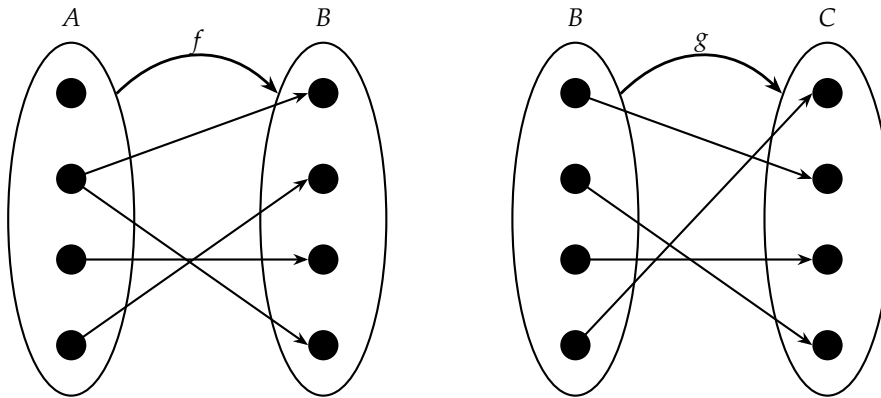
(A) 28

(B) 32

(C) 31

(D) 37

Câu 25. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

(B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

(D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
- ☐ B Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề " $\forall n$ số tự nhiên $n, \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ " bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (7)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (7), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (8)$$

Theo giả thiết quy nạp, (8) đúng, và do đó (7) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
- ☐ B Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ C Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ D Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$

Câu 28. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 0101 (B) 01 (C) 0 (D) 1

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (10)$$

$$= 0. \quad (11)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 (B) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
 (C) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
 (D) Chứng minh này sai vì đẳng thức (9) ở bước quy nạp không chính xác

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$ (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$ (C) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$ (D) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

Câu 31. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
 (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
 (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
 (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 32. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
 (B) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
 (C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
 (D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☒ A Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- ☐ B Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- ☒ A Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ B Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ C Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ D Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- ☒ A 8
- ☐ B 7
- ☐ C 11
- ☐ D 10

Câu 36. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i + 2)i^2$.

COMPUTESUM(n):
 if $n = 1$ then
 return 3
 $y := \text{COMPUTESUM}(n - 1)$
 return $\diamond$

Cần thay $\diamond$ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

- ☒ A $y + (n + 2)n^2$
- ☐ B y
- ☐ C $(y + 2)y^2$
- ☐ D $y + n$

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- ☒ A $g(x)$ là $O(f(x))$
- ☐ B $f(x)$ là $O(g(x))$
- ☐ C $f(x)$ là $\Theta(g(x))$
- ☐ D $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- ☒ A a^k
- ☐ B $\log_b n$
- ☐ C $\log_a n$
- ☐ D b^k

Câu 39. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ A $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ B $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☒ C $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ D $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$

Câu 40. Chọn hàm có độ tăng (theo ký hiệu O -lớn) chậm nhất trong số các hàm sau.

- ☐ A $f(n) = \log n$ ☐ B $f(n) = n^2$ ☐ C $f(n) = n \log n$ ☒ D $f(n) = 7n$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 002

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. D	07. D	12. C	18. C	24. C	30. A	36. A
02. D	08. A	13. B	19. A	25. B	31. A	37. A
03. D	09. A	14. D	20. C	26. B	32. C	38. B
04. B	10. D	15. D	21. A	27. D	33. D	39. D
05. D	11. D	16. C	22. C	28. B	34. A	40. A
06. C		17. A	23. C	29. B	35. C	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 003

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

☐ A $x \oplus y \oplus z$

☐ B $\neg(x \wedge y \wedge z)$

☐ C $x \wedge y \wedge z$

☐ D $x \vee y \vee z$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

☐ A $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

☐ C $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

☐ D $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

☐ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

☐ B $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

☐ C Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

☐ D $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

☐ A $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ B $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ C $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ D $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 06. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (B) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ (D) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- (A) Peter nói thật và Alice nói dối (B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối (D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (*multiplicative inverse*) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- (A) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$ (B) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
(C) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ (D) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 09. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- (A) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$ (B) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
(C) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$ (D) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ (B) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
(C) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ (D) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 11. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- (A) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
(B) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
(C) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
(D) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$

Câu 12. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (*additive inverse*) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- (A) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 13. Một *bản đồ* (*map*) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một *cách tô màu khả thi với 2 màu* (*feasible 2-coloring*) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(**Chú ý:** Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☐ **A** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$
☐ **B** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
- ☐ **C** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$
☐ **D** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 14. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ **A** Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
☐ **B** Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
☐ **C** Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
☐ **D** Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

Câu 15. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

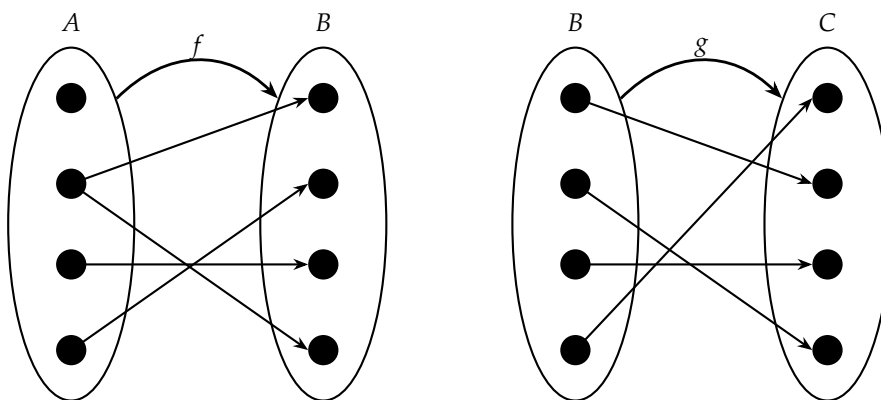
Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ **A** $x \leftrightarrow y$
☐ **B** $x \oplus y$
☐ **C** $x \wedge y$
☐ **D** $x \vee y$

Câu 16. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- ☐ **A** 1044
 ☐ **B** 1210
 ☐ **C** 500
 ☐ **D** 484

Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- ☐ **A** $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
 ☐ **B** $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
☐ **C** $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
 ☐ **D** $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \emptyset$

(B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(C) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 19. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 3

(B) 1

(C) 2

(D) 4

Câu 20. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

(A) 42525

(B) 44200

(C) 43750

(D) 43800

Câu 21. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

(A) 103

(B) 100

(C) 101

(D) 102

Câu 22. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 1

(B) 4

(C) 3

(D) 2

Câu 23. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 170

(B) 185

(C) 195

(D) 165

Câu 24. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

(A) 28

(B) 32

(C) 31

(D) 37

Câu 25. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 2

(B) 4

(C) 1

(D) 3

Câu 26. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

(A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (1)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (2)$$

$$= 0. \quad (3)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ A Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
- ☐ B Chứng minh này sai vì đẳng thức (1) ở bước quy nạp không chính xác
- ☐ C Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- ☐ D Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu “ $n + 1 = n + 2$ ”. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☐ A Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- ☐ B Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- ☐ A $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$
- ☐ B $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$
- ☐ C $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$
- ☐ D $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- ☐ A 7
- ☐ B 11
- ☐ C 8
- ☐ D 10

Câu 31. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☐ A Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- ☐ B Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- ☐ C Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- ☐ D Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 (B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 (C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 (D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 33. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j + 1)$ (B) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k + 1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j + 1)$ (D) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k + 1)$

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (4)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

Vậy $P(k + 1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 (B) Không có gì sai trong chứng minh này
 (C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (4) không chính xác
 (D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 35. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 0 (B) 01 (C) 0101 (D) 1

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

- ☐ (A) Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy
- ☐ (B) Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy
- ☐ (C) Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy
- ☐ (D) Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy

Câu 37. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
for j := 2 to m do
  b := b + 2

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ (A) $O(m)$
- ☐ (B) $O(m \cdot n)$
- ☐ (C) $O(n)$
- ☐ (D) $O(m + n)$

Câu 38. Chọn hàm có độ tăng (theo ký hiệu O -lớn) chậm nhất trong số các hàm sau.

- ☐ (A) $f(n) = 7n$
- ☐ (B) $f(n) = n^2$
- ☐ (C) $f(n) = \log n$
- ☐ (D) $f(n) = n \log n$

Câu 39. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```

MERGESORT(A[1...n]):
  << Sắp xếp trộn dãy A[1...n] >>
  if n > 1
    m := ⌊n/2⌋ << Tách thành hai mảng con >>
    MERGESORT(A[1...m]) << Đệ quy >>
    MERGESORT(A[m+1...n]) << Đệ quy >>
    MERGE(A[1...n], m) << Trộn hai mảng con >>

```

```

MERGE(A[1...n], m):
  << Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n] >>
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
    if j > n then
      B[k] := A[i]; i := i + 1
    else if i > m then
      B[k] := A[j]; j := j + 1
    else if A[i] < A[j] then
      B[k] := A[i]; i := i + 1
    else
      B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
    A[k] := B[k]

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ (A) $O(n)$
- ☐ (B) $O(n \log n)$
- ☐ (C) $O(n^2)$
- ☐ (D) $O(\log n)$

Câu 40. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ (A) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
- ☐ (B) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- ☐ (C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- ☐ (D) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 003

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

- | | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 01. D | 06. A | 12. D | 18. A | 24. C | 30. B | 36. C |
| 02. D | 07. B | 13. B | 19. B | 25. A | 31. C | 37. D |
| 03. B | 08. B | 14. B | 20. B | 26. C | 32. C | 38. C |
| 04. B | 09. A | 15. A | 21. D | 27. A | 33. B | 39. B |
| 05. C | 10. A | 16. B | 22. C | 28. B | 34. A | 40. A |
| | 11. B | 17. C | 23. B | 29. A | 35. B | |

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 004

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

☒ A Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

☐ B $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

☐ C $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

☐ D $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Câu 02. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(**Chú ý:** Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

☒ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

Câu 03. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

☒ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 04. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- (A) $x \vee y \vee z$ (B) $x \wedge y \wedge z$ (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 05. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ (B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$ (D) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 06. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- (A) Cả Alice và Peter đều nói thật (B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói dối (D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- (A) Peter nói thật và Alice nói dối (B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối (D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ (B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ (D) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

Câu 09. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
(B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(C) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
(D) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- (A) $x \oplus y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \vee y$

Câu 11. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{"Tàu đến muộn."}$
 $q = \text{"Giám đốc đến đúng giờ."}$
 $r = \text{"Tuần đến công ty trước giám đốc."}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- Ⓐ $(p \wedge q) \rightarrow r$ Ⓑ $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ Ⓒ $(p \wedge q) \vee r$ Ⓓ $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Câu 12. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)
Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.		

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
 Ⓑ Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
 Ⓒ Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 13. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- Ⓐ $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 Ⓑ $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 Ⓒ $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 Ⓓ $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 14. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- Ⓐ $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ Ⓑ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
 Ⓒ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ Ⓓ $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 15. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
 Ⓑ Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
 Ⓒ Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
 Ⓓ Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp

Câu 16. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- Ⓐ R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
 Ⓑ R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
 Ⓒ R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
 Ⓓ R là quan hệ tương đương

Câu 17. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 165 (B) 185 (C) 195 (D) 170

Câu 18. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(C) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ (B) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ (D) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- (A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Câu 21. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- (A) $A = B = \mathbb{N}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 22. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- (A) A là tập hữu hạn (B) Cả ba phát biểu khác đều sai
(C) $A \subset A$ (D) $B \subseteq A$

Câu 23. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1

Câu 24. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- (A) 1044 (B) 500 (C) 484 (D) 1210

Câu 25. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- (A) 101 (B) 103 (C) 100 (D) 102

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần thông tin bổ sung tối thiểu nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ B Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ C Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
- ☐ D Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- ☒ A 11
- ☐ B 7
- ☐ C 8
- ☐ D 10

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- ☒ A $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$
- ☐ B $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$
- ☐ C $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$
- ☐ D $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- ☒ A 340
- ☐ B 398
- ☐ C 468
- ☐ D 832

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- ☒ A 6071
- ☐ B -6067
- ☐ C -6071
- ☐ D 6067

Câu 32. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 1 (B) 0101 (C) 01 (D) 0

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.

- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (7)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (7), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (8)$$

Theo giả thiết quy nạp, (8) đúng, và do đó (7) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$ (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$ (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

Câu 35. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 36. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ (A) $O(n^2 \log n)$
☐ (B) $O(n)$
☐ (C) $O(n^2)$
☐ (D) $O(n \log n)$

Câu 37. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ không là $O(f(x)/2)$
☐ (B) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ là $O(f(x)/2)$
☐ (C) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ không là $O(g(x)/2)$
☐ (D) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ là $O(g(x)/2)$

Câu 38. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```

FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⌞ Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ ⌟
  if n > 1
    m := f_{ℓ-1} ⌞ Tách thành hai mảng con ⌟
    FIBMERGESORT(A[1...m]) ⌞ Đệ quy ⌟
    FIBMERGESORT(A[m+1...n]) ⌞ Đệ quy ⌟
    MERGE(A[1...n], m) ⌞ Trộn hai mảng con ⌟

```

```

MERGE(A[1...n], m):
  ⌞ Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n] ⌟
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
    if j > n then
      B[k] := A[i]; i := i + 1
    else if i > m then
      B[k] := A[j]; j := j + 1
    else if A[i] < A[j] then
      B[k] := A[i]; i := i + 1
    else
      B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
    A[k] := B[k]

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ (A) $O(\ell^2)$
☐ (B) $O(\ell f_\ell)$
☐ (C) $O(f_\ell \log \ell)$
☐ (D) $O(\ell \log \ell)$

Câu 39. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ (A) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ (B) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ (C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ (D) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$

Câu 40. Chọn hàm có độ tăng (theo ký hiệu O -lớn) chậm nhất trong số các hàm sau.

- ☐ (A) $f(n) = \log n$
☐ (B) $f(n) = n^2$
☐ (C) $f(n) = n \log n$
☐ (D) $f(n) = 7n$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 004

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☐ C	07. ☐ B	13. ☐ C	19. ☐ D	25. ☐ D	30. ☐ D	36. ☐ D
02. ☐ D	08. ☐ A	14. ☐ B	20. ☐ C	26. ☐ B	31. ☐ C	37. ☐ D
03. ☐ B	09. ☐ C	15. ☐ D	21. ☐ B	27. ☐ D	32. ☐ C	38. ☐ B
04. ☐ A	10. ☐ C	16. ☐ B	22. ☐ B	28. ☐ A	33. ☐ D	39. ☐ D
05. ☐ A	11. ☐ D	17. ☐ B	23. ☐ A	29. ☐ A	34. ☐ A	40. ☐ A
06. ☐ B	12. ☐ C	18. ☐ C	24. ☐ D		35. ☐ A	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 005

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.

- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \oplus y$ ☐ B $x \leftrightarrow y$ ☐ C $x \wedge y$ ☐ D $x \vee y$

Câu 02. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☐ A $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ B $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ C $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ D $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 03. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ A $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0)$ ☐ B $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ C $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ ☐ D $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 04. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$ ☐ B $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ ☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ A Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
☐ B Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
☐ C Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ D Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 06. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (*multiplicative inverse*) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ B $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ C $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ D $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Peter nói thật và Alice nói dối
 ☐ B Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ C Alice nói thật và Peter nói dối
 ☐ D Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)
Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.		

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
☐ C Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☐ A $x \wedge y \wedge z$
☐ B $x \oplus y \oplus z$
☐ C $x \vee y \vee z$
☐ D $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 10. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ B $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
☐ C $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
☐ D $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Câu 11. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
- ☐ (B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
- ☐ (C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
- ☐ (D) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

Câu 12. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (*additive inverse*) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ (A) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ (B) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ (C) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ (D) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 13. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
- ☐ (B) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
- ☐ (C) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
- ☐ (D) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

Câu 14. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ (A) Cả Alice và Peter đều nói dối
- ☐ (B) Cả Alice và Peter đều nói thật
- ☐ (C) Peter nói thật và Alice nói dối
- ☐ (D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 15. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ (A) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
- ☐ (B) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
- ☐ (C) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
- ☐ (D) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 16. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- ☐ (A) 102
- ☐ (B) 103
- ☐ (C) 101
- ☐ (D) 100

Câu 17. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 165
- ☐ (B) 185
- ☐ (C) 195
- ☐ (D) 170

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- ☐ (A) 2
- ☐ (B) 4
- ☐ (C) 1
- ☐ (D) 3

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- ☐ (A) $A = B = \mathbb{Q}$
- ☐ (B) $A = B = \mathbb{R}$
- ☐ (C) $A = B = \mathbb{Z}$
- ☐ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4

(B) 2

(C) 3

(D) 1

Câu 21. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 1210

(B) 484

(C) 500

(D) 1044

Câu 22. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 1

(B) 4

(C) 3

(D) 2

Câu 23. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

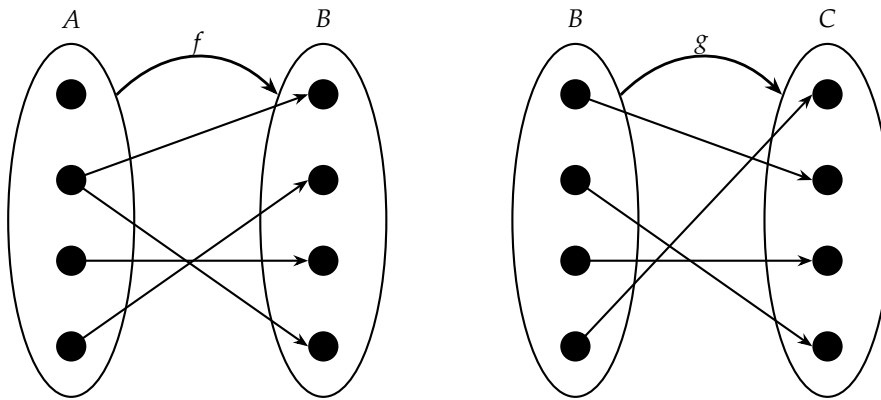
(A) 32

(B) 28

(C) 37

(D) 31

Câu 24. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

(B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

(D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 25. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$

(B) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$

(C) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

(D) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (5)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (5), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (6)$$

Theo giả thiết quy nạp, (6) đúng, và do đó (5) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- Ⓑ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
- Ⓒ Không có gì sai trong chứng minh này
- Ⓓ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- Ⓐ Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- Ⓑ Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- Ⓒ Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- Ⓓ Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ " bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (7)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (8)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ B Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- ☐ A $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$
- ☐ B $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$
- ☐ C $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$
- ☐ D $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$

Câu 30. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

- ☐ A $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$
- ☐ B $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$
- ☐ C $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$
- ☐ D $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$

Câu 31. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☐ A Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- ☐ B Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- ☐ C Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- ☐ D Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (10)$$

$$= 0. \quad (11)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- (B) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
- (C) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (D) Chứng minh này sai vì đẳng thức (9) ở bước quy nạp không chính xác

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) 6067
- (B) -6067
- (C) 6071
- (D) -6071

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$
- (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
- (C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
- (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 468
- (B) 340
- (C) 398
- (D) 832

Câu 36. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
- (B) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- (C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- (D) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Câu 37. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- Ⓐ $O(n^2)$ Ⓑ $O(n \log n)$ Ⓒ $O(n^2 \log n)$ Ⓓ $O(n)$

Câu 38. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```

FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⌞ Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ ⌟
  if n > 1
    m := f_{ℓ-1} ⌞ Tách thành hai mảng con ⌟
    FIBMERGESORT(A[1...m]) ⌞ Đệ quy ⌟
    FIBMERGESORT(A[m+1...n]) ⌞ Đệ quy ⌟
    MERGE(A[1...n], m) ⌞ Trộn hai mảng con ⌟

```

```

MERGE(A[1...n], m):
  ⌞ Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n] ⌟
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
    if j > n then
      B[k] := A[i]; i := i + 1
    else if i > m then
      B[k] := A[j]; j := j + 1
    else if A[i] < A[j] then
      B[k] := A[i]; i := i + 1
    else
      B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
    A[k] := B[k]

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- Ⓐ $O(\ell^2)$ Ⓑ $O(\ell f_\ell)$ Ⓒ $O(f_\ell \log \ell)$ Ⓓ $O(\ell \log \ell)$

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 2T(n/3) + O(1)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O -lớn.

- Ⓐ $O(n)$ Ⓑ $O(\log n)$ Ⓒ $O(1)$ Ⓓ $O(n^{\log_3 2})$

Câu 40. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- Ⓐ $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
 Ⓑ $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
 Ⓒ $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
 Ⓓ $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 005

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. B	07. B	13. A	19. B	24. D	30. D	36. A
02. D	08. D	14. D	20. D	25. A	31. C	37. B
03. A	09. C	15. D	21. A	26. B	32. B	38. B
04. D	10. B	16. A	22. D	27. D	33. D	39. D
05. B	11. A	17. B	23. D	28. B	34. A	40. C
06. A	12. D	18. D		29. A	35. D	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 006

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

(A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

(B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

(C) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

(D) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 02. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo

(B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

(C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp

(D) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

Câu 03. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

(B) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

(C) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

(D) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

(C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
 Ⓑ $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
 Ⓒ $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
 Ⓓ Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 06. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- Ⓐ $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$ Ⓑ $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
 Ⓒ $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ Ⓓ $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 07. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- Ⓐ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 Ⓑ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
 Ⓒ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 Ⓓ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 08. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- Ⓐ $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ Ⓑ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
 Ⓒ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ Ⓓ $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

Câu 09. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned} p &= \text{“Tàu đến muộn.”} \\ q &= \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”} \\ r &= \text{“Tuấn đến công ty trước giám đốc.”} \end{aligned}$$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

- Ⓐ $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ Ⓑ $(p \wedge q) \vee q$ Ⓒ $(p \wedge q) \rightarrow q$ Ⓓ $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Câu 10. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- Ⓐ $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ Ⓑ $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
 Ⓒ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$ Ⓓ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$

Câu 11. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

(A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

(B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

(C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

(D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

Câu 12. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (*multiplicative inverse*) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

(A) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

(B) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

(C) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

(D) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 13. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói thật

(B) Cả Alice và Peter đều nói dối

(C) Alice nói thật và Peter nói dối

(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 14. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

(A) $x \wedge y$

(B) $x \vee y$

(C) $x \leftrightarrow y$

(D) $x \oplus y$

Câu 15. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

(A) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

(B) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

(C) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$

(D) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 16. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$

(B) $A = B = \mathbb{N}$

(C) $A = B = \mathbb{Z}$

(D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 17. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 484

(B) 1044

(C) 1210

(D) 500

Câu 18. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

(A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

(B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

(C) R là quan hệ tương đương

(D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

Câu 19. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

(B) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

(C) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$

(D) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$

Câu 20. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 195

(B) 170

(C) 185

(D) 165

Câu 21. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(B) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(C) $\emptyset \in \emptyset$

(D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 22. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

(A) 100

(B) 103

(C) 102

(D) 101

Câu 23. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 1

Câu 24. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

(A) 28

(B) 32

(C) 31

(D) 37

Câu 25. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

(B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

(C) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

(D) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

Câu 26. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

(A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$ (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$ (D) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$

Câu 28. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

(A) 0101

(B) 01

(C) 0

(D) 1

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (5)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (5), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (6)$$

Theo giả thiết quy nạp, (6) đúng, và do đó (5) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
- (B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
- (C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- (D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (B) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (C) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (D) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 31. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần thông tin bổ sung tối thiểu nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- (B) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- (C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- (D) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
- (B) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp

- ☐ C Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
☐ D Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- ☐ A Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$ ☐ B Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
☐ C Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ ☐ D Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- ☐ A 340 ☐ B 468 ☐ C 832 ☐ D 398

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- ☐ A 8 ☐ B 7 ☐ C 11 ☐ D 10

Câu 36. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
for j := 2 to m do
  b := b + 2
  
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ A $O(n)$ ☐ B $O(m + n)$ ☐ C $O(m)$ ☐ D $O(m \cdot n)$

Câu 37. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 2T(n/3) + O(1)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O -lớn.

- ☐ A $O(n)$ ☐ B $O(\log n)$ ☐ C $O(n^{\log_3 2})$ ☐ D $O(1)$

Câu 38. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

```

COMPUTESUM(n):
  if n = 1 then
    return 3
  y := COMPUTESUM(n - 1)
  return ◇
  
```

Cần thay $\diamond$ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

- ☐ A $y + n$ ☐ B $(y + 2)y^2$ ☐ C $y + (n + 2)n^2$ ☐ D y

Câu 39. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

(A) $n!$

(B) $n \log n + 3n^2$

(C) 2^n

(D) $n \log n + 3 \log \log n$

Câu 40. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```
FIBMERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):  
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$ , với  $n = f_\ell \rangle\rangle$   
  if  $n > 1$   
     $m := f_{\ell-1}$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$   
    FIBMERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$   
    FIBMERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$   
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
```

```
MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):  
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$   
   $i := 1; j := m+1$   
  for  $k := 1$  to  $n$  do  
    if  $j > n$  then  
       $B[k] := A[i]; i := i+1$   
    else if  $i > m$  then  
       $B[k] := A[j]; j := j+1$   
    else if  $A[i] < A[j]$  then  
       $B[k] := A[i]; i := i+1$   
    else  
       $B[k] := A[j]; j := j+1$   
  for  $k := 1$  to  $n$  do  
     $A[k] := B[k]$ 
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(f_\ell \log \ell)$

(B) $O(\ell f_\ell)$

(C) $O(\ell \log \ell)$

(D) $O(\ell^2)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 006

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

- | | | | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 01. ☐ A | 07. ☐ D | 13. ☐ C | 18. ☐ B | 24. ☐ C | 30. ☐ A | 36. ☐ B |
| 02. ☐ C | 08. ☐ B | 14. ☐ C | 19. ☐ C | 25. ☐ B | 31. ☐ C | 37. ☐ C |
| 03. ☐ C | 09. ☐ A | 15. ☐ A | 20. ☐ C | 26. ☐ C | 32. ☐ C | 38. ☐ C |
| 04. ☐ B | 10. ☐ B | 16. ☐ D | 21. ☐ C | 27. ☐ D | 33. ☐ D | 39. ☐ D |
| 05. ☐ A | 11. ☐ D | 17. ☐ C | 22. ☐ C | 28. ☐ B | 34. ☐ C | 40. ☐ B |
| 06. ☐ C | 12. ☐ B | | 23. ☐ A | 29. ☐ A | 35. ☐ C | |

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 007

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

☒ (A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

☐ (B) $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

☐ (C) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

☐ (D) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Câu 02. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

☒ (A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

☐ (B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

☐ (C) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

☐ (D) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

Câu 03. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

☒ (A) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (B) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (C) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (D) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 04. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

☒ (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$

☐ (B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

☐ (C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

☐ (D) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 05. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

☒ (A) Cả Alice và Peter đều nói dối

☐ (B) Peter nói thật và Alice nói dối

☐ (C) Cả Alice và Peter đều nói thật

☐ (D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều

ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \vee y$ ☐ B $x \oplus y$ ☐ C $x \wedge y$ ☐ D $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{"Tàu đến muộn."}$
 $q = \text{"Giám đốc đến đúng giờ."}$
 $r = \text{"Tuần đến công ty trước giám đốc."}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- ☐ A $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ B $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ ☐ C $(p \wedge q) \vee q$ ☐ D $(p \wedge q) \rightarrow q$

Câu 08. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☐ A $x \oplus y \oplus z$ ☐ B $x \vee y \vee z$ ☐ C $\neg(x \wedge y \wedge z)$ ☐ D $x \wedge y \wedge z$

Câu 09. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuần là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuần”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y)$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
☐ B Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
☐ D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp

Câu 11. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- (A) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 (B) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
 (C) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 (D) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$

Câu 12. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- (A) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ (B) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
 (C) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ (D) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 13. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- (A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$ (B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
 (C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$ (D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 14. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- (A) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$ (B) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
 (C) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$ (D) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$

Câu 15. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)
Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.		

- (A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
 (B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
 (C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
 (D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 16. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- (A) 28 (B) 37 (C) 32 (D) 31

Câu 17. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) A là tập hữu hạn
☐ (B) $A \subset A$
☐ (C) Cả ba phát biểu khác đều sai
☐ (D) $B \subseteq A$

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- ☐ (A) 2
☐ (B) 4
☐ (C) 1
☐ (D) 3

Câu 19. Biểu thức nào là sai?

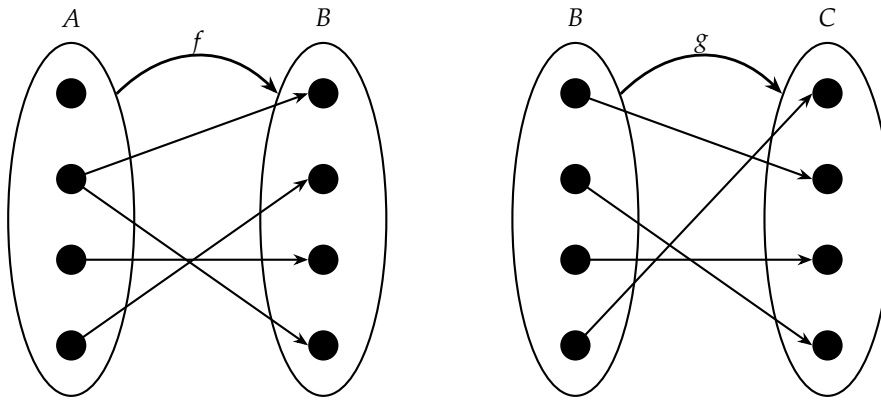
- ☐ (A) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
☐ (B) $\emptyset \subseteq \emptyset$
☐ (C) $\emptyset \in \emptyset$
☐ (D) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Câu 20. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- ☐ (A) 42525
☐ (B) 44200
☐ (C) 43750
☐ (D) 43800

Câu 21. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- ☐ (A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
☐ (B) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
☐ (C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
☐ (D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 22. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$
☐ (B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
☐ (C) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
☐ (D) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

Câu 23. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 2
☐ (B) 3
☐ (C) 4
☐ (D) 1

Câu 24. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 185
☐ (B) 170
☐ (C) 165
☐ (D) 195

Câu 25. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- ☐ (A) $A = B = \mathbb{Z}$
☐ (B) $A = B = \mathbb{N}$
☐ (C) $A = B = \mathbb{R}$
☐ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (5)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (5), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (6)$$

Theo giả thiết quy nạp, (6) đúng, và do đó (5) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- (B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
- (C) Không có gì sai trong chứng minh này
- (D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 27. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$
- (B) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$
- (C) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$
- (D) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (B) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (C) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (D) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) -6071
- (B) 6067
- (C) -6067
- (D) 6071

Câu 30. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)

- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 01 (B) 0101 (C) 0 (D) 1

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 8 (B) 10 (C) 7 (D) 11

Câu 32. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
(B) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 33. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$ (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$ (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 468 (B) 340 (C) 398 (D) 832

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong *cây đệ quy (recursion tree)* tương ứng của hệ thức là gì?

- (A) Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy
(B) Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy
(C) Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy
(D) Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy

Câu 37. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 2T(n/3) + O(1)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O -lớn.

- (A) $O(n)$ (B) $O(\log n)$ (C) $O(n^{\log_3 2})$ (D) $O(1)$

Câu 38. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0, f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```

FIBMERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$ , với  $n = f_\ell \rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := f_{\ell-1}$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    FIBMERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    FIBMERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 

```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m + 1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i + 1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j + 1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i + 1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j + 1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(\ell^2)$ (B) $O(\ell f_\ell)$ (C) $O(f_\ell \log \ell)$ (D) $O(\ell \log \ell)$

Câu 39. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```

MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 

```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m + 1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i + 1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j + 1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i + 1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j + 1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(\log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n \log n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 007

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

- | | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 01. C | 07. B | 13. B | 19. C | 25. C | 31. D | 37. C |
| 02. B | 08. B | 14. A | 20. B | 26. B | 32. C | 38. B |
| 03. A | 09. C | 15. C | 21. A | 27. C | 33. C | 39. A |
| 04. B | 10. D | 16. D | 22. B | 28. B | 34. A | 40. D |
| 05. D | 11. B | 17. C | 23. A | 29. A | 35. D | |
| 06. D | 12. B | 18. D | 24. A | 30. A | 36. C | |

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 008

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

☒ (A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

☐ (B) $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

☐ (C) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

☐ (D) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Câu 02. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

☒ (A) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo

☐ (B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

☐ (C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp

☐ (D) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

Câu 03. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$$1 = 2$$

(Điều phải chứng minh)

(1)

$$\Leftrightarrow 2 = 1$$

(Đổi xứng)

(2)

$$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$$

(Cộng theo vế (1) và (2))

(3)

$$\Leftrightarrow 3 = 3.$$

(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

☒ (A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

☐ (B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

☐ (C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

☐ (D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 04. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☐ A $x \vee y \vee z$
☐ B $x \wedge y \wedge z$
☐ C $\neg(x \wedge y \wedge z)$
☐ D $x \oplus y \oplus z$

Câu 05. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☐ A $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ B $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ C $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ D $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 06. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$
 $q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$
 $r = \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- ☐ A $(p \wedge q) \rightarrow q$
☐ B $(p \wedge q) \vee q$
☐ C $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$
☐ D $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Câu 07. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuần là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuần”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y)$

Câu 08. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☐ A $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ B $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ C $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
☐ D $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ B $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ D $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 11. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ A $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ B $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
☐ C $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
☐ D $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$

Câu 12. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
☐ C $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 13. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ A Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ B Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
☐ C Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ D Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Câu 14. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Cả Alice và Peter đều nói dối
 ☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ C Peter nói thật và Alice nói dối
 ☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 15. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ D $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- ☐ A 3
 ☐ B 4
 ☐ C 2
 ☐ D 1

Câu 17. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- ☐ A R là quan hệ tương đương
☐ B R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
☐ C R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
☐ D R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

Câu 18. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- ☐ A 44200
 ☐ B 42525
 ☐ C 43800
 ☐ D 43750

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
☐ (B) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$
☐ (C) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$
☐ (D) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

Câu 20. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 1210
 ☐ (B) 500
 ☐ (C) 1044
 ☐ (D) 484

Câu 21. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) Cả ba phát biểu khác đều sai
 ☐ (B) A là tập hữu hạn
☐ (C) $B \subseteq A$
☐ (D) $A \subset A$

Câu 22. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 165
 ☐ (B) 195
 ☐ (C) 185
 ☐ (D) 170

Câu 23. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- ☐ (A) 32
 ☐ (B) 28
 ☐ (C) 37
 ☐ (D) 31

Câu 24. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- ☐ (A) 102
 ☐ (B) 101
 ☐ (C) 100
 ☐ (D) 103

Câu 25. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 2
 ☐ (B) 4
 ☐ (C) 1
 ☐ (D) 3

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ (A) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
☐ (B) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
☐ (C) Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
☐ (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) 6067 (B) 6071 (C) -6067 (D) -6071

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
(B) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 7 (B) 11 (C) 10 (D) 8

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Con ngựa cuối cùng có màu trắng

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 468 (B) 832 (C) 340 (D) 398

Câu 32. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng
(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

Câu 33. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- ☐ (A) 0101 ☐ (B) 1 ☐ (C) 0 ☐ (D) 01

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ (A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
☐ (B) Không có gì sai trong chứng minh này
☐ (C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
☐ (D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (10)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (10), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (11)$$

Theo giả thiết quy nạp, (11) đúng, và do đó (10) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Không có gì sai trong chứng minh này
- (B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
- (C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
- (D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 36. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

COMPUTESUM(n):
 if $n = 1$ then
 return 3
 $y := \text{COMPUTESUM}(n-1)$
 return $\diamond$

Cần thay $\diamond$ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

- (A) $y + (n+2)n^2$
- (B) y
- (C) $(y+2)y^2$
- (D) $y + n$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- (A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
- (B) $f(n) = O(n \log n)$
- (C) $f(n) = O(-10n/11)$
- (D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

- (A) Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy
- (B) Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy
- (C) Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy
- (D) Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy

Câu 39. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

Ⓐ $g(x)$ là $O(f(x))$

Ⓑ $f(x)$ là $O(g(x))$

Ⓒ $f(x)$ là $o(g(x))$

Ⓓ $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0, f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```
FIBMERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):  
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$ , với  $n = f_\ell \rangle\rangle$   
  if  $n > 1$   
     $m := f_{\ell-1}$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$   
    FIBMERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$   
    FIBMERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$   
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
```

```
MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):  
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$   
   $i := 1; j := m+1$   
  for  $k := 1$  to  $n$  do  
    if  $j > n$  then  
       $B[k] := A[i]; i := i+1$   
    else if  $i > m$  then  
       $B[k] := A[j]; j := j+1$   
    else if  $A[i] < A[j]$  then  
       $B[k] := A[i]; i := i+1$   
    else  
       $B[k] := A[j]; j := j+1$   
  for  $k := 1$  to  $n$  do  
     $A[k] := B[k]$ 
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

Ⓐ $O(f_\ell \log \ell)$

Ⓑ $O(\ell f_\ell)$

Ⓒ $O(\ell \log \ell)$

Ⓓ $O(\ell^2)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 008

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. C	07. D	12. D	17. C	23. D	29. B	35. B
02. C	08. A	13. D	18. A	24. A	30. A	36. A
03. A	09. A	14. A	19. D	25. A	31. B	37. B
04. A	10. D	15. D	20. A	26. D	32. D	38. B
05. A	11. D	16. A	21. A	27. D	33. D	39. A
06. C			22. C	28. B	34. A	40. B

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 009

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ... ?`

☐ A $x \oplus y \oplus z$

☐ B $\neg(x \wedge y \wedge z)$

☐ C $x \wedge y \wedge z$

☐ D $x \vee y \vee z$

Câu 02. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

☐ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

☐ D $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

Câu 03. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

☐ A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

☐ B $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

☐ C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

☐ D $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 04. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

☐ A Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

☐ B Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$

☐ C Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

☐ D Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 05. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
☐ B Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
☐ C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 06. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ A $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ B $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
☐ C $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
☐ D $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 07. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$
☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$
☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

Câu 08. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ A $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ D $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \wedge y$
☐ B $x \oplus y$
☐ C $x \vee y$
☐ D $x \leftrightarrow y$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ B Peter nói thật và Alice nói dối
☐ C Alice nói thật và Peter nói dối
☐ D Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 12. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
☐ B $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ C $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
☐ D Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 13. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ C Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ D $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Câu 14. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (*additive inverse*) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 15. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned}
 p &= \text{“Tàu đến muộn.”} \\
 q &= \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”} \\
 r &= \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”}
 \end{aligned}$$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- ☐ A $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ B $(p \wedge q) \vee q$ ☐ C $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ ☐ D $(p \wedge q) \rightarrow q$

Câu 16. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- ☐ A $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$ ☐ B $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
☐ C $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$ ☐ D $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

Câu 17. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- ☐ A 100 ☐ B 102 ☐ C 103 ☐ D 101

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- (A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ (B) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ (D) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

Câu 20. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- (A) 42525 (B) 44200 (C) 43750 (D) 43800

Câu 21. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- (A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
(B) R là quan hệ tương đương
(C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
(D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

Câu 22. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- (A) 1 (B) 4 (C) 3 (D) 2

Câu 23. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- (A) 32 (B) 28 (C) 37 (D) 31

Câu 24. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 4

Câu 25. Biểu thức nào là sai?

- (A) $\emptyset \in \emptyset$ (B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 26. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 1 (B) 01 (C) 0 (D) 0101

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 2$) (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$) (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 1$) (D) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 1$)

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu “ $n + 1 = n + 2$ ”. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☐ A Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- ☐ B Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- ☐ A Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ B Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ C Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ D Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần thông tin bổ sung tối thiểu nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☐ A Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- ☐ B Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- ☐ C Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- ☐ D Con ngựa cuối cùng có màu trắng

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k + 1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ A Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ B Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

- ☐ C Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
☐ D Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- ☐ A 832 ☐ B 398 ☐ C 340 ☐ D 468

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- ☐ A Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$ ☐ B Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
☐ C Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ ☐ D Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- ☐ A 7 ☐ B 8 ☐ C 10 ☐ D 11

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (7)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (7), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (8)$$

Theo giả thiết quy nạp, (8) đúng, và do đó (7) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ (A) Không có gì sai trong chứng minh này
☐ (B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
☐ (C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
☐ (D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- ☐ (A) $\log_a n$ ☐ (B) b^k ☐ (C) $\log_b n$ ☐ (D) a^k

Câu 37. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ (A) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ (B) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ (C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
☐ (D) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Câu 38. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

COMPUTESUM(n):
 if $n = 1$ then
 return 3
 $y := \text{COMPUTESUM}(n-1)$
 return $\diamond$

Cần thay $\diamond$ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

- ☐ (A) $y + n$ ☐ (B) $(y+2)y^2$ ☐ (C) $y + (n+2)n^2$ ☐ (D) y

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ (A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
☐ (B) $f(n) = O(n)$
☐ (C) $f(n) = O(n^{2.32})$
☐ (D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 40. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j
  
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ (A) $O(n^2 \log n)$ ☐ (B) $O(n^2)$ ☐ (C) $O(n)$ ☐ (D) $O(n \log n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 009

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. D	07. B	13. A	19. D	25. A	31. C	36. C
02. B	08. B	14. D	20. B	26. B	32. A	37. C
03. B	09. D	15. C	21. A	27. D	33. D	38. C
04. C	10. D	16. C	22. A	28. B	34. D	39. C
05. A	11. C	17. B	23. D	29. A	35. B	40. D
06. C	12. C	18. D	24. B			

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 010

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☒ A $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ ☐ B $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
☐ C $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ ☐ D $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$

Câu 02. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

p = “Tàu đến muộn.”
 q = “Giám đốc đến đúng giờ.”
 r = “Tuần đến công ty trước giám đốc.”

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- ☒ A $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ B $(p \wedge q) \vee q$ ☐ C $(p \wedge q) \rightarrow q$ ☐ D $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Câu 03. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☒ A $\exists x \exists y (P(x, Tuấn) \wedge P(y, Tuấn))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, Tuấn) \wedge P(y, Tuấn) \wedge x \neq y)$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, Tuấn) \wedge P(y, Tuấn) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, Tuấn) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, Tuấn) \wedge P(y, Tuấn) \wedge \forall z (P(z, Tuấn) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☒ A $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ B $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ C $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ D $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 05. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- (A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Peter nói thật và Alice nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 06. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- (A) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
(B) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
(C) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
(D) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 07. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)
Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.		

- (A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
(B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
(C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
(D) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

Câu 09. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- (A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Alice nói thật và Peter nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 10. Giả sử biến x xác định trên miền D . Phát biểu nào sau đây là sai?

- (A) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(B) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
(C) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
(D) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 11. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- (A) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
(B) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
(C) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
(D) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 12. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- (A) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
 (B) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 (C) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
 (D) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 13. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- (A) $x \vee y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \oplus y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 14. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- (A) $x \wedge y \wedge z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 15. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ (B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
 (C) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$ (D) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- (A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Câu 17. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- (A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{Q}$ (C) $A = B = \mathbb{N}$ (D) $A = B = \mathbb{Z}$

Câu 18. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ (B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
 (C) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$ (D) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

(A) 43750

(B) 43800

(C) 44200

(D) 42525

Câu 20. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 195

(B) 170

(C) 185

(D) 165

Câu 21. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) Cả ba phát biểu khác đều sai

(B) A là tập hữu hạn

(C) $B \subseteq A$

(D) $A \subset A$

Câu 22. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 1

(B) 4

(C) 3

(D) 2

Câu 23. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$

(B) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

(C) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$

(D) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

Câu 24. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

(A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

(B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

(C) R là quan hệ tương đương

(D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

Câu 25. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 500

(B) 1210

(C) 484

(D) 1044

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

(A) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

(B) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở

(C) Không có gì sai trong chứng minh này

(D) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 398

(B) 468

(C) 832

(D) 340

Câu 28. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

- Ⓐ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ Ⓑ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ Ⓒ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ Ⓓ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- Ⓐ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$ Ⓑ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
 Ⓒ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$ Ⓓ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- Ⓐ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓑ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓒ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓓ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (5)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (5), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (6)$$

Theo giả thiết quy nạp, (6) đúng, và do đó (5) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- Ⓐ Không có gì sai trong chứng minh này
 Ⓑ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
 Ⓒ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$ (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$ (C) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$ (D) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (7)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (8)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
 (B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
 (C) Không có gì sai trong chứng minh này
 (D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 7 (B) 8 (C) 10 (D) 11

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) 6071 (B) -6071 (C) 6067 (D) -6067

Câu 36. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    j := 2
    while j ≤ n do
        j := j · j
        a := a + j
    
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(n^2 \log n)$ (B) $O(n)$ (C) $O(n^2)$ (D) $O(n \log n)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- (A) $\log_b n$ (B) a^k (C) $\log_a n$ (D) b^k

Câu 38. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
(B) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
(C) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
(D) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Câu 39. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm n số nguyên và một số nguyên x .

```
for i := 1 to 10 do
  if  $a_i < x$  then
    return True
return False
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

- (A) $O(n^2)$ (B) $O(n)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n^3)$

Câu 40. Chọn hàm có độ tăng (theo ký hiệu O -lớn) chậm nhất trong số các hàm sau.

- (A) $f(n) = \log n$ (B) $f(n) = n^2$ (C) $f(n) = n \log n$ (D) $f(n) = 7n$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 010

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☐ C	07. ☐ B	13. ☐ D	19. ☐ C	24. ☐ D	30. ☐ A	36. ☐ D
02. ☐ D	08. ☐ B	14. ☐ B	20. ☐ C	25. ☐ B	31. ☐ C	37. ☐ A
03. ☐ B	09. ☐ B	15. ☐ B	21. ☐ A	26. ☐ B	32. ☐ C	38. ☐ D
04. ☐ B	10. ☐ D	16. ☐ A	22. ☐ D	27. ☐ C	33. ☐ D	39. ☐ C
05. ☐ A	11. ☐ A	17. ☐ A	23. ☐ A	28. ☐ D	34. ☐ D	40. ☐ A
06. ☐ C	12. ☐ A	18. ☐ B		29. ☐ A	35. ☐ B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 011

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(D) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 02. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- (A) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- (A) $x \wedge y$ (B) $x \vee y$ (C) $x \oplus y$ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 04. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
(B) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
(C) $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 05. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(**Chú ý:** Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☐ **A** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
☐ **B** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$
- ☐ **C** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$
☐ **D** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

Câu 06. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ **A** Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ **B** Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ **C** Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
☐ **D** Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Câu 07. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ **A** $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
☐ **B** $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
- ☐ **C** $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
☐ **D** $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ **A** Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
☐ **B** Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
☐ **C** Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
☐ **D** Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☐ **A** $x \wedge y \wedge z$
☐ **B** $x \oplus y \oplus z$
☐ **C** $x \vee y \vee z$
☐ **D** $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 10. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ **A** Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ **B** $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ **C** $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ **D** $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Câu 11. Cho p , q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{"Tàu đến muộn."}$
 $q = \text{"Giám đốc đến đúng giờ."}$
 $r = \text{"Tuần đến công ty trước giám đốc."}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- ☐ (A) $(p \wedge q) \rightarrow r$
☐ (B) $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
☐ (C) $(p \wedge q) \vee r$
☐ (D) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Câu 12. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuần là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuần”.

- ☐ (A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuần})))$
☐ (B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \wedge \neg P(y, \text{Tuần}))$
☐ (C) $\exists x P(x, \text{Tuần})$
☐ (D) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuần})))$

Câu 13. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☐ (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
☐ (B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ (C) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ (D) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 14. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ (A) Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ (B) Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ (C) Peter nói thật và Alice nói dối
☐ (D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 15. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ (B) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ (C) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
☐ (D) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 16. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
☐ (B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
☐ (C) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
☐ (D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$

- ☐ (A) 1
☐ (B) 3
☐ (C) 4
☐ (D) 2

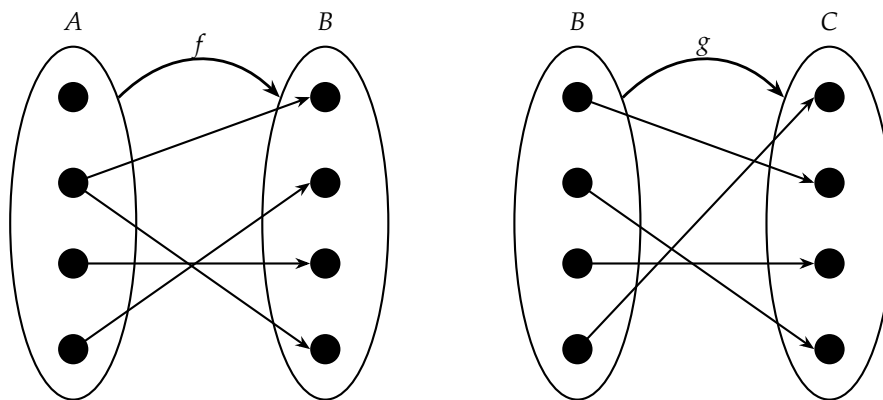
Câu 18. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 500
☐ (B) 1210
☐ (C) 484
☐ (D) 1044

Câu 19. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- ☐ (A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
☐ (B) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
☐ (C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
☐ (D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☐ A $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
☐ B $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$
☐ C $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
☐ D $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

Câu 21. Biểu thức nào là sai?

- ☐ A $\emptyset \in \{\emptyset\}$
☐ B $\emptyset \subseteq \emptyset$
☐ C $\emptyset \in \emptyset$
☐ D $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 22. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 165
☐ B 195
☐ C 185
☐ D 170

Câu 23. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- ☐ A $A = B = \mathbb{Z}$
☐ B $A = B = \mathbb{Q}$
☐ C $A = B = \mathbb{N}$
☐ D $A = B = \mathbb{R}$

Câu 24. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- ☐ A 43750
☐ B 44200
☐ C 43800
☐ D 42525

Câu 25. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- ☐ A 32
☐ B 37
☐ C 31
☐ D 28

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- ☐ A 832
☐ B 340
☐ C 468
☐ D 398

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- ☐ A $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$
☐ B $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$
☐ C $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$
☐ D $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- Ⓐ 6067 Ⓑ -6071 Ⓒ 6071 Ⓓ -6067

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- Ⓐ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓑ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓒ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓓ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (1)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (2)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 Ⓑ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
 Ⓒ Không có gì sai trong chứng minh này
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- Ⓐ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ Ⓑ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
 Ⓒ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$ Ⓓ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- ☐ (A) 10 ☐ (B) 11 ☐ (C) 7 ☐ (D) 8

Câu 33. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- ☐ (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
☐ (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
☐ (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
☐ (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

Câu 34. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- ☐ (A) 01 ☐ (B) 0 ☐ (C) 1 ☐ (D) 0101

Câu 35. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☐ (A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
☐ (B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
☐ (C) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
☐ (D) Con ngựa cuối cùng có màu trắng

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm n số nguyên và một số nguyên x .

```
for i := 1 to 10 do
  if  $a_i < x$  then
    return True
return False
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

- ☐ (A) $O(n^3)$ ☐ (B) $O(1)$ ☐ (C) $O(n^2)$ ☐ (D) $O(n)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo *Định lý thợ* (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ (A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
☐ (B) $f(n) = O(n \log n)$
☐ (C) $f(n) = O(-10n/11)$
☐ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) $f(x)$ là $O(g(x))$ ☐ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ ☐ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ ☐ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 39. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☒ **A** $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- ☐ **B** $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- ☐ **C** $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- ☐ **D** $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☒ **A** $f(n) = O(n \log n)$
- ☐ **B** Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
- ☐ **C** $f(n) = O(n^{2.32})$
- ☐ **D** $f(n) = O(n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 011

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. D	07. B	13. B	18. B	24. B	30. A	36. B
02. B	08. B	14. D	19. D	25. C	31. C	37. B
03. D	09. C	15. D	20. A	26. A	32. B	38. B
04. B	10. D	16. D	21. C	27. D	33. C	39. D
05. A	11. D	17. B	22. C	28. B	34. A	40. C
06. D	12. D		23. D	29. A	35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 012

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

☐ (A) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (B) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (C) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (D) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 02. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

p = “Tàu đến muộn.”

q = “Giám đốc đến đúng giờ.”

r = “Tuần đến công ty trước giám đốc.”

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

☐ (A) $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

☐ (B) $(p \wedge q) \vee q$

☐ (C) $(p \wedge q) \rightarrow q$

☐ (D) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Câu 03. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

☐ (A) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0)$

☐ (B) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$

☐ (C) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$

☐ (D) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 04. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

☐ (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$

☐ (B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

☐ (C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

☐ (D) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 05. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

☐ (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

☐ (B) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

☐ (C) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

☐ (D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 06. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
☐ D $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Peter nói thật và Alice nói dối
☐ B Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ C Alice nói thật và Peter nói dối
☐ D Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☒ A $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ B $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ D $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☒ A $x \wedge y \wedge z$
☐ B $x \oplus y \oplus z$
☐ C $x \vee y \vee z$
☐ D $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☒ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☒ A $x \vee y$
☐ B $x \leftrightarrow y$
☐ C $x \oplus y$
☐ D $x \wedge y$

Câu 12. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Peter nói thật và Alice nói dối ☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ C Cả Alice và Peter đều nói dối ☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 13. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
☐ B Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
☐ D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo

Câu 14. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 15. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
☐ C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- ☐ A 3 ☐ B 4 ☐ C 2 ☐ D 1

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- ☐ A 1 ☐ B 3 ☐ C 4 ☐ D 2

Câu 18. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 2 ☐ B 4 ☐ C 1 ☐ D 3

Câu 19. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
 (C) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

- (B) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$
 (D) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

Câu 20. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- (A) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
 (B) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$
 (C) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$
 (D) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

Câu 21. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- (A) 1210 (B) 484 (C) 500 (D) 1044

Câu 22. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- (A) 43800 (B) 42525 (C) 43750 (D) 44200

Câu 23. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 170 (B) 185 (C) 195 (D) 165

Câu 24. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- (A) 102 (B) 101 (C) 100 (D) 103

Câu 25. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- (A) $A = B = \mathbb{Z}$ (B) $A = B = \mathbb{N}$ (C) $A = B = \mathbb{R}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 26. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4), P(5), P(6), P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (B) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (D) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 27. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
 (B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
 (C) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
 (D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 398 (B) 340 (C) 468 (D) 832

Câu 29. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 01 (B) 0101 (C) 1 (D) 0

Câu 30. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
- (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Không có gì sai trong chứng minh này
- (B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
- (C) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$ (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
- (C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$ (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☐ A Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- ☐ B Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (7)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 0. \quad (9)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☐ A Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ B Chứng minh này sai vì đẳng thức (7) ở bước quy nạp không chính xác
- ☐ C Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- ☐ D Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- ☐ A Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ B Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ C Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ D Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 36. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ A $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
- ☐ B $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
- ☐ C $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
- ☐ D $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Câu 37. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
for j := 2 to m do
  b := b + 2

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ (A) $O(m)$
☐ (B) $O(m \cdot n)$
☐ (C) $O(n)$
☐ (D) $O(m + n)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thặng (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ (A) $f(n) = O(n)$
☐ (B) Không áp dụng được Định lý thặng với hệ thức đã cho
☐ (C) $f(n) = O(n \log n)$
☐ (D) $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 39. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

```

COMPUTESUM(n):
  if n = 1 then
    return 3
  y := COMPUTESUM(n - 1)
  return ◇

```

Cần thay ◇ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

- ☐ (A) $(y+2)y^2$
☐ (B) $y + n$
☐ (C) y
☐ (D) $y + (n+2)n^2$

Câu 40. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ (A) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
☐ (B) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ (C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ (D) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 012

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☐ C	07. ☐ B	13. ☐ A	19. ☐ D	25. ☐ C	30. ☐ C	36. ☐ B
02. ☐ D	08. ☐ B	14. ☐ D	20. ☐ B	26. ☐ A	31. ☐ C	37. ☐ D
03. ☐ A	09. ☐ C	15. ☐ C	21. ☐ A	27. ☐ D	32. ☐ C	38. ☐ D
04. ☐ B	10. ☐ D	16. ☐ D	22. ☐ D	28. ☐ D	33. ☐ D	39. ☐ D
05. ☐ C	11. ☐ B	17. ☐ B	23. ☐ B	29. ☐ A	34. ☐ D	40. ☐ A
06. ☐ C	12. ☐ D	18. ☐ A	24. ☐ A		35. ☐ B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 013

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

- Lưu ý:** - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề " $1 = 2$ ". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------|-----|
| $1 = 2$ | (Điều phải chứng minh) | (1) |
| $\Leftrightarrow 2 = 1$ | (Đối xứng) | (2) |
| $\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$ | (Cộng theo vế (1) và (2)) | (3) |
| $\Leftrightarrow 3 = 3.$ | | (4) |

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
☐ B Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
☐ C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 02. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng "với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương"?

- ☐ A $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
☐ B $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
☐ C $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ D $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$

Câu 03. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☐ A $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ B $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ C $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ D $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 04. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

- ☐ A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ B $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ D $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$."

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
- ☐ B Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
- ☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
- ☐ D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

Câu 06. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- | | |
|---|---|
| ☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$ | ☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$ |
| ☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$ | ☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$ |

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

- | | | | |
|---|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| ☐ A $x \leftrightarrow y$ | ☐ B $x \wedge y$ | ☐ C $x \oplus y$ | ☐ D $x \vee y$ |
|---|--------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ A Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
- ☐ B Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
- ☐ C Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
- ☐ D Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$

Câu 09. Với các số thực x và y , số y được gọi là nghịch đảo cộng (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ B $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ C $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ D $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
- ☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
- ☐ C $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
- ☐ D $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

☒ A Cả Alice và Peter đều nói thật

☐ C Alice nói thật và Peter nói dối

B Peter nói thật và Alice nói dối
D Cả Alice và Peter đều nói dối

☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☒ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Ⓐ $x \vee y \vee z$ Ⓑ $x \wedge y \wedge z$ Ⓒ $x \oplus y \oplus z$ Ⓓ $\neg(x \wedge y \wedge z)$

☐ A Cả Alice và Peter đều nói dối
 ☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật

☐ C Peter nói thật và Alice nói dối
 ☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

$p = \text{"Tàu đến muộn."}$
 $q = \text{"Giám đốc đến đúng giờ."}$
 $r = \text{"Tuần đến công ty trước giám đốc."}$

(A) $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
 (B) $(p \wedge q) \vee q$
 (C) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$
 (D) $(p \wedge q) \rightarrow q$

(A) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ (B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
 (C) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ (D) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

Câu 17. Biểu thức nào là sai?

- (A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \in \emptyset$

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- (A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Câu 19. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 185 (B) 165 (C) 170 (D) 195

Câu 20. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- (A) 1210 (B) 500 (C) 1044 (D) 484

Câu 21. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- (A) $A = B = \mathbb{N}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

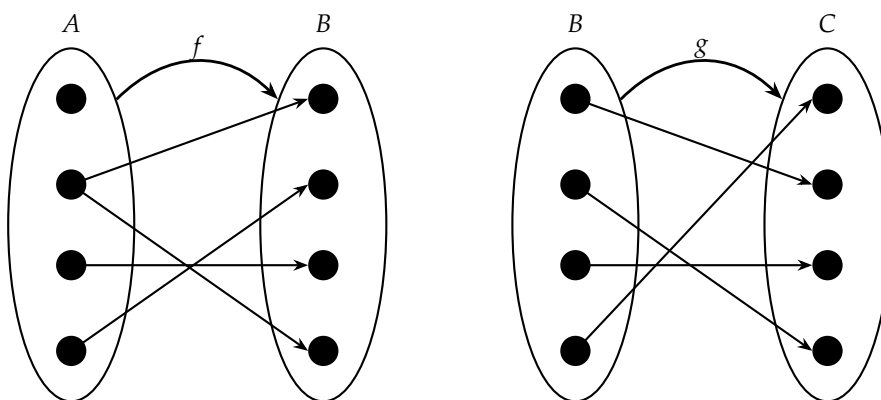
Câu 22. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- (A) R là quan hệ tương đương
(B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
(C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
(D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

Câu 23. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 24. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- (A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh (B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh (D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 25. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 2

(B) 4

(C) 1

(D) 3

Câu 26. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

(A) 1

(B) 01

(C) 0

(D) 0101

Câu 27. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 398

(B) 340

(C) 468

(D) 832

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- (C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
- (D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 8
- (B) 10
- (C) 7
- (D) 11

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu “ $n + 1 = n + 2$ ”. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
- (B) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- (C) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- (D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) 6067
- (B) -6067
- (C) 6071
- (D) -6071

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (7)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (7), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (8)$$

Theo giả thiết quy nạp, (8) đúng, và do đó (7) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
- (B) Không có gì sai trong chứng minh này
- (C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- (D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (10)$$

$$= 0. \quad (11)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì đẳng thức (9) ở bước quy nạp không chính xác
- (B) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (C) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
- (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- (A) $f(n) = O(-10n/11)$
- (B) $f(n) = O(n)$
- (C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
- (D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 37. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ A $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
- ☐ B $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
- ☐ C $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
- ☐ D $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Câu 38. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

- ☐ A $n \log n + 3n^2$
- ☐ B $n!$
- ☐ C $n \log n + 3 \log \log n$
- ☐ D 2^n

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ A Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
- ☐ B $f(n) = O(n)$
- ☐ C $f(n) = O(n^{2.32})$
- ☐ D $f(n) = O(n \log n)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- ☐ A $\log_a n$
- ☐ B $\log_b n$
- ☐ C b^k
- ☐ D a^k

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 013

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☐ C	07. ☐ A	13. ☐ A	19. ☐ A	25. ☐ A	31. ☐ D	37. ☐ D
02. ☐ D	08. ☐ C	14. ☐ D	20. ☐ A	26. ☐ B	32. ☐ C	38. ☐ C
03. ☐ A	09. ☐ B	15. ☐ C	21. ☐ B	27. ☐ B	33. ☐ D	39. ☐ C
04. ☐ A	10. ☐ D	16. ☐ B	22. ☐ B	28. ☐ D	34. ☐ A	40. ☐ B
05. ☐ C	11. ☐ D	17. ☐ D	23. ☐ D	29. ☐ A	35. ☐ C	
06. ☐ C	12. ☐ B	18. ☐ C	24. ☐ D	30. ☐ A	36. ☐ D	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 014

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền D nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ B $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ C Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ D $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Câu 04. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ B $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ D $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 05. Giả sử biến x xác định trên miền D . Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ A $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ D $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 06. Giả sử biến x xác định trên miền D nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
☐ D $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

Câu 07. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

☐ A $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ B $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ C $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ D $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 08. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

Câu 09. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

☐ A $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

☐ A Alice nói thật và Peter nói dối

☐ B Cả Alice và Peter đều nói dối

☐ C Peter nói thật và Alice nói dối

☐ D Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

☐ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

☐ B Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

☐ C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 12. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- Ⓐ $\neg(x \wedge y \wedge z)$ Ⓑ $x \vee y \vee z$ Ⓒ $x \wedge y \wedge z$ Ⓓ $x \oplus y \oplus z$

Câu 13. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- Ⓐ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$ Ⓑ $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
 Ⓒ $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ Ⓓ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 14. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$
 $q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$
 $r = \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- Ⓐ $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ Ⓑ $(p \wedge q) \rightarrow q$ Ⓒ $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ Ⓓ $(p \wedge q) \vee q$

Câu 15. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- Ⓐ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
 Ⓑ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 Ⓒ Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
 Ⓓ Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$

- Ⓐ 3 Ⓑ 4 Ⓒ 2 Ⓓ 1

Câu 17. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- Ⓐ $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$ Ⓑ $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
 Ⓒ $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ Ⓓ $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

Câu 18. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- Ⓐ 170 Ⓑ 195 Ⓒ 165 Ⓓ 185

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

(A) 43750

(B) 43800

(C) 44200

(D) 42525

Câu 20. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$

(B) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$

(C) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

(D) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

Câu 21. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(B) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(C) $\emptyset \in \emptyset$

(D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 22. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

(A) 100

(B) 103

(C) 102

(D) 101

Câu 23. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

(B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh

(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 24. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 3

(B) 2

(C) 1

(D) 4

Câu 25. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

(A) $A = B = \mathbb{Z}$

(B) $A = B = \mathbb{N}$

(C) $A = B = \mathbb{R}$

(D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

(A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

(B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

(C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

(D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 27. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

• **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)

• **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

(A) 0101

(B) 0

(C) 1

(D) 01

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (5)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (5), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (6)$$

Theo giả thiết quy nạp, (6) đúng, và do đó (5) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
 Ⓑ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
 Ⓒ Không có gì sai trong chứng minh này
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 29. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

- Ⓐ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ Ⓑ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ Ⓒ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ Ⓓ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- Ⓐ -6071 Ⓑ 6067 Ⓒ 6071 Ⓓ -6067

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- Ⓐ 468 Ⓑ 832 Ⓒ 340 Ⓓ 398

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (7)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 0. \quad (9)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- (B) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
- (C) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (D) Chứng minh này sai vì đẳng thức (7) ở bước quy nạp không chính xác

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (10)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (11)$$

Vậy $P(k + 1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- (B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác
- (C) Không có gì sai trong chứng minh này
- (D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 34. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng
- (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☐ (A) Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ (B) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- ☐ (C) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- ☐ (D) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ (A) $f(n) = O(n \log n)$
- ☐ (B) $f(n) = O(n^{2.32})$
- ☐ (C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
- ☐ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

- ☐ (A) $n!$
- ☐ (B) $n \log n + 3n^2$
- ☐ (C) $n \log n + 3 \log \log n$
- ☐ (D) 2^n

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
for j := 2 to m do
  b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ (A) $O(m \cdot n)$
- ☐ (B) $O(m)$
- ☐ (C) $O(n)$
- ☐ (D) $O(m + n)$

Câu 39. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```
FIBMERGESORT(A[1...n]):
  «Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_l»
  if n > 1
    m := f_{l-1} «Tách thành hai mảng con»
    FIBMERGESORT(A[1...m]) «Đệ quy»
    FIBMERGESORT(A[m+1...n]) «Đệ quy»
    MERGE(A[1...n], m) «Trộn hai mảng con»
```

```
MERGE(A[1...n], m):
  «Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]»
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
    if j > n then
      B[k] := A[i]; i := i + 1
    else if i > m then
      B[k] := A[j]; j := j + 1
    else if A[i] < A[j] then
      B[k] := A[i]; i := i + 1
    else
      B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
    A[k] := B[k]
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

A $O(\ell f_\ell)$

B $O(\ell^2)$

C $O(\ell \log \ell)$

D $O(f_\ell \log \ell)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo *Định lý thặng (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

A $f(n) = O(-10n/11)$

B Không áp dụng được Định lý thặng với hệ thức đã cho

C $f(n) = O(n)$

D $f(n) = O(n \log n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 014

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. A	07. B	13. B	19. C	25. C	31. B	37. C
02. C	08. D	14. A	20. B	26. B	32. B	38. D
03. B	09. B	15. A	21. C	27. D	33. D	39. A
04. A	10. A	16. D	22. C	28. B	34. B	40. D
05. C	11. D	17. C	23. D	29. C	35. B	
06. C	12. B	18. D	24. B	30. A	36. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 015

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

☒ (A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

☐ (B) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

☐ (C) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

☐ (D) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Câu 02. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

• Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

• Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

☒ (A) Peter nói thật và Alice nói dối

☐ (B) Alice nói thật và Peter nói dối

☐ (C) Cả Alice và Peter đều nói thật

☐ (D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 03. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

☒ (A) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

☐ (B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp

☐ (C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

☐ (D) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo

Câu 04. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

☒ (A) $x \vee y$

☐ (B) $x \wedge y$

☐ (C) $x \leftrightarrow y$

☐ (D) $x \oplus y$

Câu 05. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☐ A $\neg(x \wedge y \wedge z)$ ☐ B $x \wedge y \wedge z$ ☐ C $x \oplus y \oplus z$ ☐ D $x \vee y \vee z$

Câu 08. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☐ A $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ B $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ C $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ D $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 09. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☐ A $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ ☐ B $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ C $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$ ☐ D $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$ ☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$ ☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

Câu 11. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- (A) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 (B) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
 (C) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 (D) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$

Câu 12. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- (A) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ (B) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
 (C) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ (D) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 13. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$ (B) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
 (C) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ (D) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 14. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$
 $q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$
 $r = \text{“Tuấn đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

- (A) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ (B) $(p \wedge q) \rightarrow q$ (C) $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ (D) $(p \wedge q) \vee q$

Câu 15. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)
Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.		

- (A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
 (B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
 (C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
 (D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 16. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ (B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
 (C) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ (D) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 1

(B) 3

(C) 4

(D) 2

Câu 18. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 500

(B) 1210

(C) 484

(D) 1044

Câu 19. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 185

(B) 165

(C) 170

(D) 195

Câu 20. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$

(B) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$

(C) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

(D) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

Câu 21. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

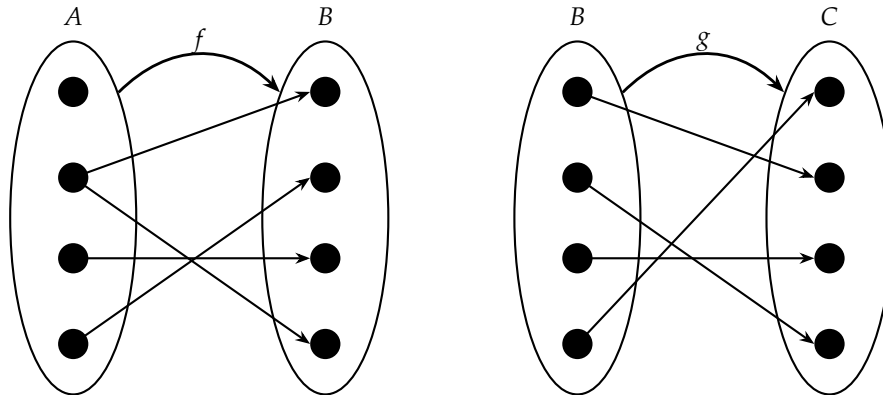
(A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

(B) R là quan hệ tương đương

(C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

(D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

Câu 22. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

(B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 23. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

(A) 32

(B) 28

(C) 37

(D) 31

Câu 24. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

(A) 43750

(B) 44200

(C) 43800

(D) 42525

Câu 25. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \emptyset$

(B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(C) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 26. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (B) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (D) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu “ $n+1 = n+2$ ”. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k+1 = k+2$. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k+1 = k+2$, ta có $k+2 = k+3$. Do đó, $P(k+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
 (B) Không có gì sai trong chứng minh này
 (C) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
 (D) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 11 (B) 7 (C) 8 (D) 10

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (5)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (5), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (6)$$

Theo giả thiết quy nạp, (6) đúng, và do đó (5) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ (A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
☐ (B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
☐ (C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
☐ (D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- ☐ (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$ ☐ (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
☐ (C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ ☐ (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☐ (A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
☐ (B) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
☐ (C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
☐ (D) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- ☐ (A) -6067 ☐ (B) 6067 ☐ (C) -6071 ☐ (D) 6071

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- ☐ (A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
☐ (B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
☐ (C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
☐ (D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- ☐ (A) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$ ☐ (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$ ☐ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$ ☐ (D) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 468

(B) 340

(C) 398

(D) 832

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm n số nguyên và một số nguyên x .

```
for  $i := 1$  to 10 do
  if  $a_i < x$  then
    return True
return False
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$

(B) $O(1)$

(C) $O(n^2)$

(D) $O(n)$

Câu 37. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```
MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]\rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
```

```
MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$

(B) $O(n \log n)$

(C) $O(\log n)$

(D) $O(n^2)$

Câu 38. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

(A) $n \log n + 3n^2$

(B) $n!$

(C) $n \log n + 3 \log \log n$

(D) 2^n

Câu 39. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

(B) $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

(C) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

(D) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

(A) Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy

(B) Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy

(C) Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy

(D) Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 015

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. D	07. D	13. C	19. A	25. A	31. C	37. B
02. D	08. D	14. A	20. B	26. A	32. C	38. C
03. B	09. A	15. C	21. A	27. D	33. D	39. C
04. C	10. B	16. B	22. B	28. A	34. A	40. B
05. D	11. B	17. A	23. D	29. A	35. D	
06. A	12. B	18. B	24. B	30. A	36. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 016

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(D) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 02. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- (A) $\bigwedge_{(i, j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$
(B) $\bigwedge_{(i, j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$
(C) $\bigwedge_{(i, j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$
(D) $\bigwedge_{(i, j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

Câu 03. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- (A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(B) Cả Alice và Peter đều nói thật
(C) Alice nói thật và Peter nói dối
(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 04. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là nghịch đảo nhân (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- (A) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
(B) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
(C) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
(D) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 05. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- Ⓐ $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ Ⓑ $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
 Ⓒ $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$ Ⓓ $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 06. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- Ⓐ Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 Ⓑ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 Ⓒ Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
 Ⓓ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Câu 07. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
 Ⓑ Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
 Ⓒ Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 08. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- Ⓐ $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ Ⓑ $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
 Ⓒ $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ Ⓓ $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- Ⓐ $x \wedge y \wedge z$ Ⓑ $x \oplus y \oplus z$ Ⓒ $x \vee y \vee z$ Ⓓ $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 10. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
 Ⓑ $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
 Ⓒ $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
 Ⓓ $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Câu 11. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☒ A $x \vee y$
☐ B $x \leftrightarrow y$
☐ C $x \oplus y$
☒ D $x \wedge y$

Câu 12. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Peter nói thật và Alice nói dối
 ☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
☒ C Cả Alice và Peter đều nói dối
 ☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 13. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng "với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương"?

- ☒ A $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ B $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
☒ C $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
☐ D $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 14. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☒ A $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☒ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ D $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 15. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned}
 p &= \text{"Tàu đến muộn."} \\
 q &= \text{"Giám đốc đến đúng giờ."} \\
 r &= \text{"Tuần đến công ty trước giám đốc."}
 \end{aligned}$$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc."

- ☒ A $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
☐ B $(p \wedge q) \vee q$
☐ C $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$
☒ D $(p \wedge q) \rightarrow q$

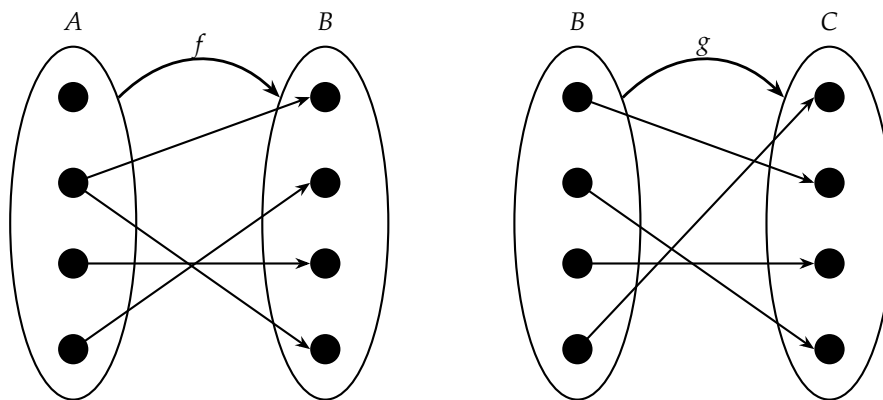
Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- ☒ A 43750
 ☐ B 42525
 ☐ C 44200
 ☒ D 43800

Câu 17. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
☐ B f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
☐ C f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
☒ D f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- ☐ A $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
☐ B $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
☐ C $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
☐ D $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- ☐ A R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
☐ B R là quan hệ tương đương
☐ C R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
☐ D R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

Câu 20. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- ☐ A $A = B = \mathbb{N}$
☐ B $A = B = \mathbb{Z}$
☐ C $A = B = \mathbb{Q}$
☐ D $A = B = \mathbb{R}$

Câu 21. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- ☐ A 37
☐ B 31
☐ C 32
☐ D 28

Câu 22. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- ☐ A 1
☐ B 4
☐ C 3
☐ D 2

Câu 23. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- ☐ A 101
☐ B 102
☐ C 103
☐ D 100

Câu 24. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☐ A $A \subset A$
☐ B $B \subseteq A$
☐ C A là tập hữu hạn
☐ D Cả ba phát biểu khác đều sai

Câu 25. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 170
☐ B 195
☐ C 165
☐ D 185

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 832 (B) 340 (C) 468 (D) 398

Câu 27. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
 (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
 (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
 (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} 5(k+1) - 5 &= 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) && \text{(Biến đổi đại số)} && (5) \\ &= 2(0) - 0 && \text{(Giả thiết quy nạp)} && (6) \\ &= 0. && && (7) \end{aligned}$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
 (B) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 (C) Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
 (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai

Câu 29. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- (A) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (B) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (C) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (D) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 (B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 (C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 (D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 31. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☐ A Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- ☐ B Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- ☐ C Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- ☐ D Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- ☐ A $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$
- ☐ B $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$
- ☐ C $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$
- ☐ D $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- ☐ A 6067
- ☐ B -6067
- ☐ C 6071
- ☐ D -6071

Câu 34. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- ☐ A 01
- ☐ B 0
- ☐ C 1
- ☐ D 0101

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (8)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (8), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (9)$$

Theo giả thiết quy nạp, (9) đúng, và do đó (8) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ (A) Không có gì sai trong chứng minh này
☐ (B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
☐ (C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
☐ (D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ (A) $f(n) = O(n \log n)$
☐ (B) $f(n) = O(n^{2.32})$
☐ (C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
☐ (D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

- ☐ (A) $n!$ ☐ (B) $n \log n + 3n^2$ ☐ (C) $n \log n + 3 \log \log n$ ☐ (D) 2^n

Câu 38. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```

MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]\rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
  
```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 
  
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ (A) $O(n \log n)$ ☐ (B) $O(n)$ ☐ (C) $O(\log n)$ ☐ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) $g(x)$ là $O(f(x))$ ☐ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ ☐ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ ☐ (D) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$

Câu 40. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ (A) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}, O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
☐ (B) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}, O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ (C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}, O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ (D) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}, O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 016

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. D	06. D	12. D	18. B	24. D	30. A	36. B
02. D	07. B	13. B	19. D	25. D	31. C	37. C
03. A	08. A	14. B	20. D	26. A	32. C	38. A
04. A	09. C	15. C	21. B	27. B	33. D	39. A
05. A	10. B	16. C	22. A	28. A	34. A	40. A
	11. B	17. A	23. B	29. C	35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 017

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề " $1 = 2$ ". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------|-----|
| $1 = 2$ | (Điều phải chứng minh) | (1) |
| $\Leftrightarrow 2 = 1$ | (Đổi xứng) | (2) |
| $\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$ | (Cộng theo vế (1) và (2)) | (3) |
| $\Leftrightarrow 3 = 3.$ | | (4) |

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 02. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ " x là bạn của y ". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn".

- (A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ (B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
(C) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$ (D) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

Câu 03. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng "với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương"?

- (A) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$ (B) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
(C) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ (D) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 04. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
(B) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
(C) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 05. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{"Tàu đến muộn."}$
 $q = \text{"Giám đốc đến đúng giờ."}$
 $r = \text{"Tuấn đến công ty trước giám đốc."}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

- ☐ A $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ ☐ B $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ C $(p \wedge q) \rightarrow q$ ☐ D $(p \wedge q) \vee q$

Câu 06. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \leftrightarrow y$ ☐ B $x \wedge y$ ☐ C $x \oplus y$ ☐ D $x \vee y$

Câu 08. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Alice nói thật và Peter nói dối ☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ C Peter nói thật và Alice nói dối ☐ D Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 09. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$ ☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$
☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$ ☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 10. Với các số thực x và y , số y được gọi là nghịch đảo cộng (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$ ☐ B $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$ ☐ D $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 12. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☐ A $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$ ☐ B $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
☐ C $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ ☐ D $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 13. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Cả Alice và Peter đều nói thật ☐ B Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ C Alice nói thật và Peter nói dối ☐ D Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 14. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ A $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ ☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ ☐ D $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 15. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ A Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
☐ B Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ C Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
☐ D Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 16. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 3 ☐ B 4 ☐ C 2 ☐ D 1

Câu 17. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 165 ☐ B 185 ☐ C 195 ☐ D 170

Câu 18. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- ☐ A $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$ ☐ B $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
☐ C $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$ ☐ D $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

Câu 19. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- ☐ A 3 ☐ B 1 ☐ C 2 ☐ D 4

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

(B) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

(C) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

(D) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

Câu 21. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

(A) 37

(B) 31

(C) 32

(D) 28

Câu 22. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

(A) 43800

(B) 42525

(C) 43750

(D) 44200

Câu 23. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

(A) $A = B = \mathbb{Z}$

(B) $A = B = \mathbb{Q}$

(C) $A = B = \mathbb{N}$

(D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 24. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 1044

(B) 500

(C) 484

(D) 1210

Câu 25. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

(A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

(B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

(C) R là quan hệ tương đương

(D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

(B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$

(C) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$

(D) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$

Câu 27. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

• **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)

• **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

(A) 0101

(B) 0

(C) 1

(D) 01

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

(A) 11

(B) 7

(C) 8

(D) 10

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- (B) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- (C) Không có gì sai trong chứng minh này
- (D) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (B) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (C) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (D) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- (B) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
- (C) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (D) Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ " bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☒ B Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
- ☒ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☒ D Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 34. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- ☒ A Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
- ☒ B Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- ☒ C Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- ☒ D Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- ☒ A Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
- ☒ B Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$
- ☒ C Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
- ☒ D Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 36. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- ☒ A $f(x)$ là $\Theta(g(x))$
- ☒ B $f(x)$ là $o(g(x))$
- ☒ C $g(x)$ là $O(f(x))$
- ☒ D $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 37. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☒ A $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
- ☒ B $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
- ☒ C $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
- ☒ D $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Câu 38. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

- ☐ A $n \log n + 3n^2$ ☐ B $n!$ ☐ C $n \log n + 3 \log \log n$ ☐ D 2^n

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thặng (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ A Không áp dụng được Định lý thặng với hệ thức đã cho
☐ B $f(n) = O(n)$
☐ C $f(n) = O(n^{2.32})$
☐ D $f(n) = O(n \log n)$

Câu 40. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm n số nguyên và một số nguyên x .

```
for  $i := 1$  to 10 do  
  if  $a_i < x$  then  
    return True  
return False
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

- ☐ A $O(n^3)$ ☐ B $O(n^2)$ ☐ C $O(1)$ ☐ D $O(n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 017

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☐ C	07. ☐ A	12. ☐ C	18. ☐ A	24. ☐ D	30. ☐ A	36. ☐ C
02. ☐ B	08. ☐ D	13. ☐ C	19. ☐ B	25. ☐ B	31. ☐ C	37. ☐ D
03. ☐ A	09. ☐ A	14. ☐ B	20. ☐ A	26. ☐ B	32. ☐ B	38. ☐ C
04. ☐ A	10. ☐ A	15. ☐ A	21. ☐ B	27. ☐ D	33. ☐ D	39. ☐ C
05. ☐ A	11. ☐ A	16. ☐ C	22. ☐ D	28. ☐ A	34. ☐ B	40. ☐ C
06. ☐ A		17. ☐ B	23. ☐ D	29. ☐ C	35. ☐ B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 018

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

Câu 02. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

☐ A $\neg(x \wedge y \wedge z)$

☐ B $x \oplus y \oplus z$

☐ C $x \vee y \vee z$

☐ D $x \wedge y \wedge z$

Câu 03. Với các số thực x và y , số y được gọi là nghịch đảo cộng (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

☐ A $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

☐ B $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

☐ C $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

☐ D $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng

ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- (A) $x \vee y$ (B) $x \wedge y$ (C) $x \leftrightarrow y$ (D) $x \oplus y$

Câu 05. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- (A) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ (B) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
(C) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$ (D) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 06. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$ (B) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- (A) Peter nói thật và Alice nói dối (B) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Alice nói thật và Peter nói dối (D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Giả sử biến x xác định trên miền D . Phát biểu nào sau đây là sai?

- (A) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (B) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ (D) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

Câu 09. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
(B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
(C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
(D) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
(C) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(D) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

p = “Tàu đến muộn.”
 q = “Giám đốc đến đúng giờ.”
 r = “Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

- ☐ A $(p \wedge q) \rightarrow q$ ☐ B $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ C $(p \wedge q) \vee q$ ☐ D $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Câu 12. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Peter nói thật và Alice nói dối ☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ C Cả Alice và Peter đều nói dối ☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 13. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ A $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$ ☐ B $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
☐ C $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ ☐ D $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 14. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☐ A $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ B $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ C $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ D $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 15. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)
Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.		

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
☐ C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 16. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- ☐ A 102 ☐ B 103 ☐ C 101 ☐ D 100

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 1

(B) 3

(C) 4

(D) 2

Câu 18. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$

(B) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$

(C) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

(D) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

Câu 19. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 3

(B) 1

(C) 2

(D) 4

Câu 20. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

(A) 42525

(B) 44200

(C) 43750

(D) 43800

Câu 21. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

(A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

(B) R là quan hệ tương đương

(C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

(D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

Câu 22. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 165

(B) 195

(C) 185

(D) 170

Câu 23. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

(A) 32

(B) 28

(C) 37

(D) 31

Câu 24. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

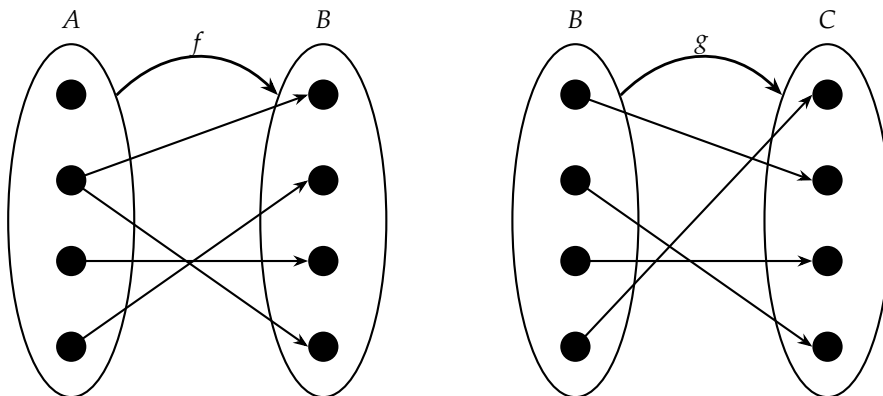
(A) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

(B) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

(C) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

(D) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

Câu 25. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

(B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

(D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 26. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (B) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (D) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$ (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$ (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) 6067 (B) -6071 (C) 6071 (D) -6067

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (5)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (5), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (6)$$

Theo giả thiết quy nạp, (6) đúng, và do đó (5) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
(B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
(C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
- (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (7)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 0. \quad (9)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì đẳng thức (7) ở bước quy nạp không chính xác
- (B) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- (C) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu “ $n + 1 = n + 2$ ”. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
- (B) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- (C) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- (D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 33. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- (B) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- (C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- (D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 340 (B) 468 (C) 832 (D) 398

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$ (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$ (D) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$

Câu 36. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $f(x)$ là $o(g(x))$ (C) $g(x)$ là $O(f(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Câu 37. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

COMPUTESUM(n):
if $n = 1$ then
 return 3
 $y :=$ COMPUTESUM($n - 1$)
return $\diamond$

Cần thay $\diamond$ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

- (A) $(y+2)y^2$ (B) $y+n$ (C) $y+(n+2)n^2$ (D) y

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

- (A) Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy
(B) Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy
(C) Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy
(D) Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- (A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n)$
(C) $f(n) = O(n^{2.32})$
(D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 40. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm n số nguyên và một số nguyên x .

for $i := 1$ to 10 do
 if $a_i < x$ then
 return True
return False

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

- (A) $O(n^3)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(1)$ (D) $O(n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 018

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☒ C	07. ☒ C	13. ☒ B	19. ☒ C	25. ☒ B	31. ☒ D	37. ☒ C
02. ☒ C	08. ☒ B	14. ☒ A	20. ☒ B	26. ☒ A	32. ☒ C	38. ☒ B
03. ☒ C	09. ☒ C	15. ☒ C	21. ☒ A	27. ☒ D	33. ☒ D	39. ☒ C
04. ☒ C	10. ☒ D	16. ☒ A	22. ☒ C	28. ☒ B	34. ☒ C	40. ☒ C
05. ☒ C	11. ☒ D	17. ☒ B	23. ☒ D	29. ☒ A	35. ☒ B	
06. ☒ C	12. ☒ C	18. ☒ A	24. ☒ D	30. ☒ C	36. ☒ C	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 019

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

☒ A $x \oplus y$

☐ B $x \leftrightarrow y$

☐ C $x \wedge y$

☐ D $x \vee y$

Câu 02. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

☒ A $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ B $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ C $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ D $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

☒ A $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

☐ C $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

☐ D $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

☒ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

☐ C Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$
- ☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$
☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

Câu 06. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
☐ D $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

Câu 07. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Peter nói thật và Alice nói dối
☐ B Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ C Alice nói thật và Peter nói dối
☐ D Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 08. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ... ?`

- ☐ A $x \oplus y \oplus z$
☐ B $x \vee y \vee z$
☐ C $\neg(x \wedge y \wedge z)$
☐ D $x \wedge y \wedge z$

Câu 09. Với các số thực x và y , số y được gọi là nghịch đảo cộng (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☒ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuần})))$
☐ B $\exists x P(x, \text{Tuần})$
☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuần})))$
☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \wedge \neg P(y, \text{Tuần}))$

Câu 11. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Cả Alice và Peter đều nói thật
 ☐ B Peter nói thật và Alice nói dối
☐ C Alice nói thật và Peter nói dối
 ☐ D Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 12. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned}
 p &= \text{“Tàu đến muộn.”} \\
 q &= \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”} \\
 r &= \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”}
 \end{aligned}$$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- ☒ A $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
☐ B $(p \wedge q) \rightarrow q$
☐ C $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$
☐ D $(p \wedge q) \vee q$

Câu 13. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☒ A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ B $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ D $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 14. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuần là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuần”.

- ☒ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y)$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 15. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ D $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Câu 16. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☒ A 3
 ☐ B 4
 ☐ C 2
 ☐ D 1

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- ☒ A 1
 ☐ B 3
 ☐ C 4
 ☐ D 2

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2

(B) 4

(C) 1

(D) 3

Câu 19. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

(B) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(C) $\emptyset \in \emptyset$

(D) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Câu 20. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh

(B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

(C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 21. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$

(B) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

(C) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$

(D) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

Câu 22. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

(A) 43800

(B) 42525

(C) 43750

(D) 44200

Câu 23. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

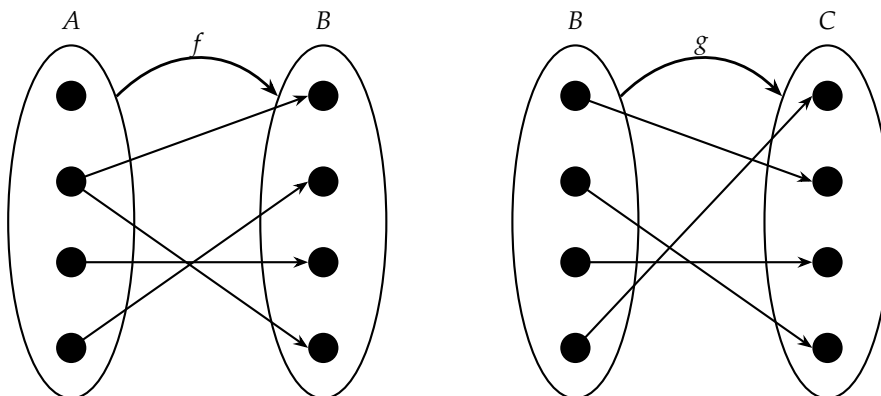
(A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

(B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

(C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

(D) R là quan hệ tương đương

Câu 24. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

(B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

(D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 25. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

(A) 32

(B) 37

(C) 31

(D) 28

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$ (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

Câu 27. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 28. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (B) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (D) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$

Câu 29. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ " bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (5)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (5), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (6)$$

Theo giả thiết quy nạp, (6) đúng, và do đó (5) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
- Ⓑ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
- Ⓒ Không có gì sai trong chứng minh này
- Ⓓ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- Ⓐ 6071
- Ⓑ -6067
- Ⓒ -6071
- Ⓓ 6067

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- Ⓐ Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- Ⓑ Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- Ⓒ Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- Ⓓ Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- Ⓐ 398
- Ⓑ 832
- Ⓒ 468
- Ⓓ 340

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (7)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 0. \quad (9)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☒ B Chứng minh này sai vì đẳng thức (7) ở bước quy nạp không chính xác
- ☒ C Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- ☒ D Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 35. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- ☒ A 0
- ☒ B 01
- ☒ C 0101
- ☒ D 1

Câu 36. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```

MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]\rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 

```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☒ A $O(\log n)$
- ☒ B $O(n^2)$
- ☒ C $O(n)$
- ☒ D $O(n \log n)$

Câu 37. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```

FIBMERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$ , với  $n = f_\ell \rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := f_{\ell-1}$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    FIBMERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    FIBMERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 

```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ A $O(\ell f_\ell)$
☐ B $O(\ell^2)$
☐ C $O(f_\ell \log \ell)$
☐ D $O(\ell \log \ell)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ A $f(n) = O(n \log n)$
☐ B Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
☐ C $f(n) = O(-10n/11)$
☐ D $f(n) = O(n)$

Câu 39. Chọn hàm có độ tăng (theo ký hiệu O -lớn) chậm nhất trong số các hàm sau.

- ☐ A $f(n) = n^2$
☐ B $f(n) = 7n$
☐ C $f(n) = n \log n$
☐ D $f(n) = \log n$

Câu 40. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- ☐ A Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ không là $O(g(x)/2)$
☐ B Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ không là $O(f(x)/2)$
☐ C Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ là $O(g(x)/2)$
☐ D Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ là $O(f(x)/2)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 019

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. B	07. C	13. A	19. C	25. C	30. A	36. D
02. D	08. B	14. B	20. D	26. B	31. C	37. A
03. B	09. B	15. D	21. C	27. D	32. C	38. A
04. B	10. A	16. C	22. D	28. D	33. B	39. D
05. A	11. D	17. B	23. C	29. D	34. D	40. C
06. C	12. C	18. C	24. D		35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 020

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \oplus y$ ☐ B $x \leftrightarrow y$ ☐ C $x \wedge y$ ☐ D $x \vee y$

Câu 02. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$ ☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$
- ☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$ ☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

Câu 03. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Cả Alice và Peter đều nói dối ☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
- ☐ C Alice nói thật và Peter nói dối ☐ D Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
- ☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
- ☐ C Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
- ☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
- ☐ B $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
- ☐ C $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
- ☐ D $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 06. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ A $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
- ☐ B $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
- ☐ C $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
- ☐ D $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 07. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
- ☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
- ☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
- ☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
- ☐ B Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
- ☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
- ☐ D Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

Câu 09. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
- ☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
- ☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
- ☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ (A) Alice nói thật và Peter nói dối ☐ (B) Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ (C) Peter nói thật và Alice nói dối ☐ (D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Giả sử biến x xác định trên miền D nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ (B) $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
☐ (C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ (D) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Câu 12. Giả sử biến x xác định trên miền D nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ (B) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ (C) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ (D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 13. Giả sử biến x xác định trên miền D . Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ ☐ (B) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
☐ (C) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ ☐ (D) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

Câu 14. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ (A) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
☐ (B) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ (C) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
☐ (D) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 15. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☐ (A) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ (B) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ (C) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ (D) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 16. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 3 ☐ (B) 4 ☐ (C) 2 ☐ (D) 1

Câu 17. Biểu thức nào là sai?

- ☐ (A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ ☐ (B) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ ☐ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ☐ (D) $\emptyset \in \emptyset$

Câu 18. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- ☐ (A) $A = B = \mathbb{Z}$ ☐ (B) $A = B = \mathbb{N}$ ☐ (C) $A = B = \mathbb{R}$ ☐ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 19. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- ☐ (A) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$ ☐ (B) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$
☐ (C) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$ ☐ (D) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$

Câu 20. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- Ⓐ Cả ba phát biểu khác đều sai
 Ⓒ $A \subset A$

- Ⓑ $B \subseteq A$
 Ⓓ A là tập hữu hạn

Câu 21. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- Ⓐ $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
 Ⓑ $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$
 Ⓒ $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$
 Ⓓ $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

Câu 22. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- Ⓐ 165
 Ⓑ 195
 Ⓒ 185
 Ⓓ 170

Câu 23. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

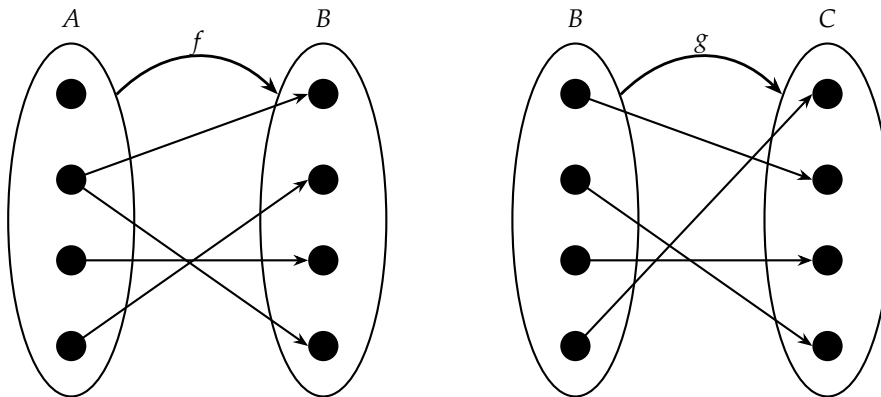
- Ⓐ 44200
 Ⓑ 43750
 Ⓒ 42525
 Ⓓ 43800

Câu 24. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- Ⓐ 3
 Ⓑ 2
 Ⓒ 1
 Ⓓ 4

Câu 25. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- Ⓐ $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
 Ⓑ $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
 Ⓒ $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
 Ⓓ $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- Ⓐ Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
 Ⓑ Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 Ⓒ Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
 Ⓓ Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

Vậy $P(k + 1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
 Ⓑ Không có gì sai trong chứng minh này
 Ⓒ Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- Ⓐ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$ Ⓑ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$ Ⓒ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$ Ⓓ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

Câu 29. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
- (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$
- (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
- (C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
- (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- (B) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- (C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- (D) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 832
- (B) 398
- (C) 340
- (D) 468

Câu 33. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 0101
- (B) 1
- (C) 0
- (D) 01

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) -6071
- (B) 6071
- (C) -6067
- (D) 6067

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

(A) 8

(B) 7

(C) 11

(D) 10

Câu 36. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm n số nguyên và một số nguyên x .

```
for  $i := 1$  to 10 do
  if  $a_i < x$  then
    return True
return False
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

(A) $O(n^3)$

(B) $O(1)$

(C) $O(n^2)$

(D) $O(n)$

Câu 37. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

(B) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

(C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$

(D) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Câu 38. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
 $a := 0$ 
 $b := 0$ 
for  $i := 1$  to  $n$  do
   $j := 2$ 
  while  $j \leq n$  do
     $j := j \cdot j$ 
     $a := a + j$ 
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n \log n)$

(B) $O(n^2)$

(C) $O(n^2 \log n)$

(D) $O(n)$

Câu 39. Chọn hàm có độ tăng (theo ký hiệu O -lớn) chậm nhất trong số các hàm sau.

(A) $f(n) = n^2$

(B) $f(n) = 7n$

(C) $f(n) = n \log n$

(D) $f(n) = \log n$

Câu 40. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```
MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$  $\rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  đệ quy $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  đệ quy $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con $\rangle\rangle$ 
```

```
MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$  $\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(\log n)$

(B) $O(n)$

(C) $O(n^2)$

(D) $O(n \log n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 020

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

- | | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 01. B | 07. D | 13. A | 19. C | 25. B | 31. C | 37. C |
| 02. D | 08. B | 14. C | 20. A | 26. D | 32. A | 38. A |
| 03. C | 09. B | 15. C | 21. A | 27. D | 33. D | 39. D |
| 04. B | 10. B | 16. C | 22. C | 28. B | 34. A | 40. D |
| 05. C | 11. D | 17. D | 23. A | 29. D | 35. C | |
| 06. C | 12. B | 18. C | 24. C | 30. A | 36. B | |

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 021

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

☒ (A) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (B) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☒ (C) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (D) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 02. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

☒ (A) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

☐ (B) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

☐ (C) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

☐ (D) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 03. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

☒ (A) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

☐ (B) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

☐ (C) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

☐ (D) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 04. Một *bản đồ* (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một *cách tô màu khả thi với 2 màu* (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(**Chú ý:** Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một *đồ thị* (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một *cách tô màu* (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

☒ (A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

☐ (B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

☒ (C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

☐ (D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☒ A $x \wedge y$ ☐ B $x \leftrightarrow y$ ☐ C $x \vee y$ ☐ D $x \oplus y$

Câu 06. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ " x là bạn của y ". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn".

- ☒ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 07. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ " x là bạn của y ". Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề "Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn".

- ☒ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ ☐ B $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ ☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 08. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☒ A $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ ☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \neq (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ ☐ D $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

Câu 09. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ D $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Alice nói thật và Peter nói dối ☐ B Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ C Peter nói thật và Alice nói dối ☐ D Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned} p &= \text{"Tàu đến muộn."} \\ q &= \text{"Giám đốc đến đúng giờ."} \\ r &= \text{"Tuấn đến công ty trước giám đốc."} \end{aligned}$$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc."

- ☒ A $(p \wedge q) \rightarrow q$ ☐ B $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ C $(p \wedge q) \vee q$ ☐ D $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Câu 12. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ (A) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
☐ (B) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☒ (C) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
☐ (D) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$

Câu 13. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
☐ (B) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
☐ (C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
☒ (D) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo

Câu 14. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)
Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.		

- ☐ (A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
☐ (B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
☐ (C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
☒ (D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 15. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☐ (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
☐ (B) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☒ (C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ (D) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- ☐ (A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
 ☐ (B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
☐ (C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
 ☐ (D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

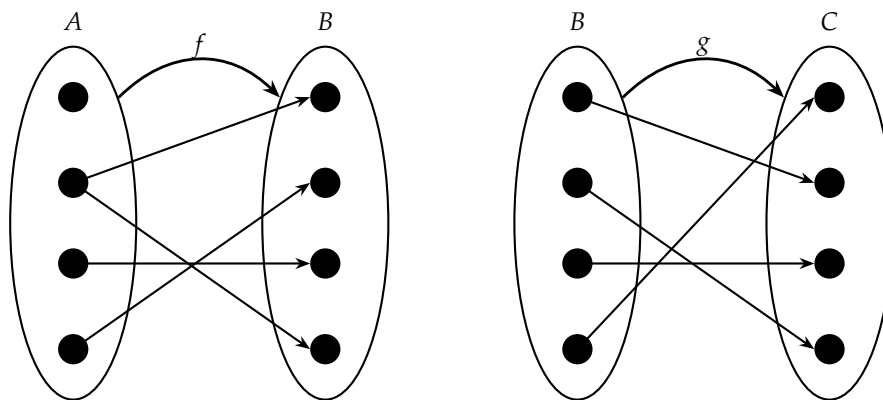
Câu 17. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 1
 ☐ (B) 3
 ☐ (C) 4
 ☒ (D) 2

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- ☐ (A) 2
 ☐ (B) 4
 ☐ (C) 1
 ☒ (D) 3



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Câu 19. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- (A) 102 (B) 100 (C) 101 (D) 103

Câu 20. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- (A) 1210 (B) 500 (C) 1044 (D) 484

Câu 21. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- (A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
 (B) R là quan hệ tương đương
 (C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
 (D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

Câu 22. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- (A) 31 (B) 37 (C) 28 (D) 32

Câu 23. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- (A) $A = B = \mathbb{Z}$ (B) $A = B = \mathbb{Q}$ (C) $A = B = \mathbb{N}$ (D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 24. Biểu thức nào là sai?

- (A) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Câu 25. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- (A) $B \subseteq A$ (B) Cả ba phát biểu khác đều sai
 (C) A là tập hữu hạn (D) $A \subset A$

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) -6067 (B) -6071 (C) 6071 (D) 6067

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 2$) (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$) (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 1$) (D) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 1$)

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 398 (B) 340 (C) 468 (D) 832

Câu 29. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$ (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 8 (B) 10 (C) 7 (D) 11

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
- ☒ B Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- ☒ C Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
- ☒ D Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n+1 = n+2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k+1 = k+2$. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k+1 = k+2$, ta có $k+2 = k+3$. Do đó, $P(k+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☒ A Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- ☒ B Không có gì sai trong chứng minh này
- ☒ C Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
- ☒ D Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp

Câu 35. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

- ☒ A $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$
- ☒ B $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$
- ☒ C $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$
- ☒ D $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$

Câu 36. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- ☒ A Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ không là $O(g(x)/2)$
- ☒ B Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ là $O(g(x)/2)$
- ☒ C Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ không là $O(f(x)/2)$
- ☒ D Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ là $O(f(x)/2)$

Câu 37. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

- ☒ A $n!$
- ☒ B $n \log n + 3n^2$
- ☒ C $n \log n + 3 \log \log n$
- ☒ D 2^n

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    a := a + 1
for j := 2 to m do
    b := b + 2
    
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

☐ A $O(m \cdot n)$

☐ B $O(m)$

☐ C $O(n)$

☐ D $O(m + n)$

Câu 39. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

☐ A $O(n^2)$

☐ B $O(n \log n)$

☐ C $O(n)$

☐ D $O(n^2 \log n)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (*Master Theorem*) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

☐ A $f(n) = O(n \log n)$

☐ B Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

☐ C $f(n) = O(n^{2.32})$

☐ D $f(n) = O(n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 021

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☐ C	07. ☐ C	13. ☐ A	19. ☐ A	25. ☐ B	30. ☐ A	36. ☐ B
02. ☐ B	08. ☐ B	14. ☐ A	20. ☐ A	26. ☐ B	31. ☐ D	37. ☐ C
03. ☐ B	09. ☐ C	15. ☐ C	21. ☐ A	27. ☐ D	32. ☐ C	38. ☐ D
04. ☐ B	10. ☐ A	16. ☐ B	22. ☐ A	28. ☐ D	33. ☐ A	39. ☐ B
05. ☐ B	11. ☐ D	17. ☐ D	23. ☐ D	29. ☐ D	34. ☐ A	40. ☐ C
06. ☐ A	12. ☐ C	18. ☐ C	24. ☐ B		35. ☐ D	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 022

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- (A) Alice nói thật và Peter nói dối
(B) Peter nói thật và Alice nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói dối
(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 02. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$
 $q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$
 $r = \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- (A) $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ (B) $(p \wedge q) \vee q$ (C) $(p \wedge q) \rightarrow q$ (D) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Câu 03. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- (A) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0)$ (B) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
(C) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ (D) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 04. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$ (B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
(C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$ (D) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 05. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(**Chú ý:** Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- Ⓐ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$ Ⓑ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$
 Ⓒ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$ Ⓓ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

Câu 06. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- Ⓐ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
 Ⓑ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 Ⓒ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
 Ⓓ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 07. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- Ⓐ $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ Ⓑ $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
 Ⓒ $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ Ⓓ $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 08. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- Ⓐ $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ Ⓑ $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
 Ⓒ $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ Ⓓ $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

Câu 09. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- Ⓐ $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ Ⓑ $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
 Ⓒ $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$ Ⓓ $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- Ⓐ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 Ⓑ Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
 Ⓒ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
 Ⓓ Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 11. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
 Ⓑ $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
 Ⓒ Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
 Ⓓ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

Câu 12. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Peter nói thật và Alice nói dối
- ☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
- ☐ C Cả Alice và Peter đều nói dối
- ☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 13. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
- ☐ B Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
- ☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
- ☐ D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo

Câu 14. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
- ☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
- ☐ C Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
- ☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 15. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...`?

- ☐ A $x \leftrightarrow y$
- ☐ B $x \oplus y$
- ☐ C $x \wedge y$
- ☐ D $x \vee y$

Câu 16. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

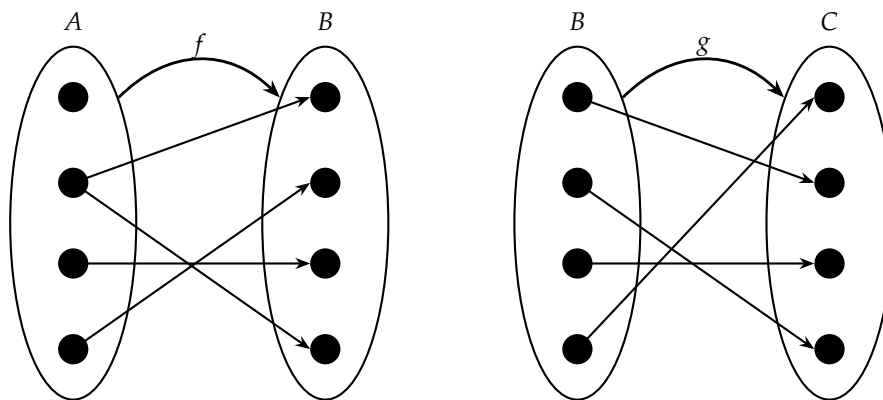
- ☐ A $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$
- ☐ B $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
- ☐ C $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$
- ☐ D $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

Câu 17. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☐ A A là tập hữu hạn
- ☐ B $A \subset A$
- ☐ C Cả ba phát biểu khác đều sai
- ☐ D $B \subseteq A$

Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

- ☐ A $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
☐ B $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
☐ C $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
☐ D $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- ☐ A R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
☐ B R là quan hệ tương đương
☐ C R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
☐ D R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

Câu 20. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 195
☐ B 170
☐ C 185
☐ D 165

Câu 21. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- ☐ A 1210
☐ B 484
☐ C 500
☐ D 1044

Câu 22. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 1
☐ B 4
☐ C 3
☐ D 2

Câu 23. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- ☐ A 2
☐ B 3
☐ C 4
☐ D 1

Câu 24. Biểu thức nào là sai?

- ☐ A $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
☐ B $\emptyset \in \emptyset$
☐ C $\emptyset \subseteq \emptyset$
☐ D $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Câu 25. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- ☐ A 101
☐ B 103
☐ C 100
☐ D 102

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) -6067

(B) -6071

(C) 6071

(D) 6067

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

(A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 2$) (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$) (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 1$) (D) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 1$)

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 340

(B) 398

(C) 832

(D) 468

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
(C) Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
(D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai

Câu 31. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
- (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 32. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- (B) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- (C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- (D) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 33. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 0101 (B) 1 (C) 0 (D) 01

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (B) Không có gì sai trong chứng minh này
- (C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
- (D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

(A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

(B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$

(C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

(D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 36. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
  for j := 2 to m do
    b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n)$

(B) $O(m + n)$

(C) $O(m)$

(D) $O(m \cdot n)$

Câu 37. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

```
COMPUTESUM(n):
  if n = 1 then
    return 3
  y := COMPUTESUM(n - 1)
  return ◇
```

Cần thay ◇ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

(A) $(y+2)y^2$

(B) $y + n$

(C) $y + (n+2)n^2$

(D) y

Câu 38. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n \log n)$

(B) $O(n^2)$

(C) $O(n^2 \log n)$

(D) $O(n)$

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 2T(n/3) + O(1)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O -lớn.

(A) $O(n)$

(B) $O(\log n)$

(C) $O(1)$

(D) $O(n^{\log_3 2})$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(-10n/11)$

(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

(C) $f(n) = O(n)$

(D) $f(n) = O(n \log n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 022

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

- | | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 01. A | 07. B | 13. A | 19. D | 25. D | 31. A | 37. C |
| 02. D | 08. A | 14. A | 20. C | 26. B | 32. C | 38. A |
| 03. A | 09. C | 15. A | 21. A | 27. D | 33. D | 39. D |
| 04. B | 10. C | 16. C | 22. D | 28. B | 34. A | 40. D |
| 05. A | 11. A | 17. C | 23. D | 29. C | 35. B | |
| 06. A | 12. C | 18. B | 24. B | 30. B | 36. B | |

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 023

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
(B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
(C) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
(D) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp

Câu 02. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(B) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
(C) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
(D) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền D . Phát biểu nào sau đây là sai?

- (A) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ (B) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
(C) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ (D) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

Câu 04. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- (A) $x \vee y \vee z$ (B) $x \wedge y \wedge z$ (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 05. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- (A) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$ (B) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
(C) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$ (D) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$

Câu 06. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ (A) Cả Alice và Peter đều nói thật
- ☐ (B) Alice nói thật và Peter nói dối
- ☐ (C) Cả Alice và Peter đều nói dối
- ☐ (D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 07. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☒ (A) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ (B) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ (C) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ (D) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 08. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ (A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
- ☐ (B) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
- ☐ (C) $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
- ☐ (D) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Câu 09. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ (A) Cả Alice và Peter đều nói dối
- ☐ (B) Alice nói thật và Peter nói dối
- ☐ (C) Cả Alice và Peter đều nói thật
- ☐ (D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☒ (A) $x \oplus y$
- ☐ (B) $x \wedge y$
- ☐ (C) $x \leftrightarrow y$
- ☐ (D) $x \vee y$

Câu 11. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☒ (A) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
- ☐ (B) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
- ☐ (C) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
- ☐ (D) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 12. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☒ (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
- ☐ (B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
- ☐ (C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
- ☐ (D) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 13. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned} p &= \text{"Tàu đến muộn."} \\ q &= \text{"Giám đốc đến đúng giờ."} \\ r &= \text{"Tuần đến công ty trước giám đốc."} \end{aligned}$$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc."

- Ⓐ $(p \wedge q) \rightarrow q$ Ⓑ $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ Ⓒ $(p \wedge q) \vee q$ Ⓓ $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Câu 14. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề " $1 = 2$ ". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
 Ⓑ Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
 Ⓒ Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 15. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề "Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ". Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề "Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ "?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- Ⓐ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$ Ⓑ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$
 Ⓒ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$ Ⓓ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- Ⓐ 3 Ⓑ 4 Ⓒ 2 Ⓓ 1

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

(A) 43800

(B) 43750

(C) 42525

(D) 44200

Câu 18. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

(B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

(C) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

(D) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

Câu 19. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

(A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

(B) R là quan hệ tương đương

(C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

(D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

Câu 20. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 4

(B) 2

(C) 3

(D) 1

Câu 21. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 1210

(B) 484

(C) 500

(D) 1044

Câu 22. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 1

(B) 4

(C) 3

(D) 2

Câu 23. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 170

(B) 185

(C) 195

(D) 165

Câu 24. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

(A) $A = B = \mathbb{Q}$

(B) $A = B = \mathbb{Z}$

(C) $A = B = \mathbb{R}$

(D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 25. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

(A) 32

(B) 37

(C) 31

(D) 28

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

(A) 10

(B) 7

(C) 8

(D) 11

Câu 27. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

(A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

Câu 28. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (B) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (D) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$ (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
(C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$ (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 340 (B) 398 (C) 468 (D) 832

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) 6071 (B) -6067 (C) -6071 (D) 6067

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (5)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (5), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (6)$$

Theo giả thiết quy nạp, (6) đúng, và do đó (5) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
☐ B Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
☐ C Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
☐ D Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (7)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (8)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
☐ B Chứng minh này là sai vì đẳng thức (7) không chính xác
☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
☐ D Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 34. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- ☐ A 01 ☐ B 0 ☐ C 1 ☐ D 0101

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- ☐ A $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$ ☐ B $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$ ☐ C $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$ ☐ D $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$

Câu 36. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ A $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
☐ B $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ C $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
☐ D $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Câu 37. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ A $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
☐ B $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
☐ C $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
☐ D $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Câu 38. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

- ☐ A $n \log n + 3n^2$ ☐ B $n!$ ☐ C $n \log n + 3 \log \log n$ ☐ D 2^n

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 2T(n/3) + O(1)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O -lớn.

- ☐ A $O(n)$ ☐ B $O(\log n)$ ☐ C $O(1)$ ☐ D $O(n^{\log_3 2})$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ A $f(n) = O(-10n/11)$
☐ B Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
☐ C $f(n) = O(n)$
☐ D $f(n) = O(n \log n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 023

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. D	07. C	13. B	19. D	25. C	30. D	36. A
02. C	08. D	14. A	20. B	26. D	31. C	37. D
03. B	09. A	15. C	21. A	27. B	32. C	38. C
04. A	10. C	16. A	22. A	28. D	33. D	39. D
05. A	11. A	17. D	23. B	29. A	34. A	40. D
06. B	12. C	18. B	24. C		35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 024

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

☒ A $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

☐ B $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

☐ C $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

☐ D $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

☒ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

☐ B $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

☐ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

☐ D $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

Câu 03. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

☒ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

☐ C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

☐ D Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 04. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

(A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

(C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

(B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

(D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A)** Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
- (B)** Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
- (C)** Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
- (D)** Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

Câu 06. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A)** $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
- (B)** $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
- (C)** $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
- (D)** $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 07. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- (A)** $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
- (B)** $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
- (C)** $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
- (D)** $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 08. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- (A)** $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
- (B)** $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
- (C)** $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
- (D)** $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- (A)** $x \wedge y \wedge z$
- (B)** $x \oplus y \oplus z$
- (C)** $x \vee y \vee z$
- (D)** $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 10. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A)** Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
- (B)** $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
- (C)** $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
- (D)** $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Câu 11. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \vee y$ ☐ B $x \leftrightarrow y$ ☐ C $x \oplus y$ ☐ D $x \wedge y$

Câu 12. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 13. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ A $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$ ☐ B $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
☐ C $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ ☐ D $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 14. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 15. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ D $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Câu 16. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
☐ B f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
☐ C f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
☐ D f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 17. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- ☐ A $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$ ☐ B $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$
☐ C $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$ ☐ D $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$

Câu 18. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☐ A $B \subseteq A$ ☐ B Cả ba phát biểu khác đều sai
☐ C A là tập hữu hạn ☐ D $A \subset A$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- (A) $A = B = \mathbb{Q}$ (B) $A = B = \mathbb{R}$ (C) $A = B = \mathbb{Z}$ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ (B) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$
(C) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ (D) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

Câu 21. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- (A) 1210 (B) 484 (C) 500 (D) 1044

Câu 22. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

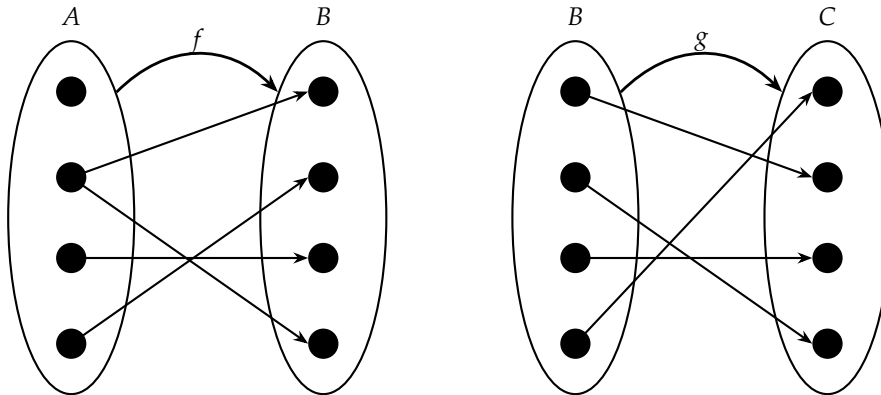
- (A) 165 (B) 195 (C) 185 (D) 170

Câu 23. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1

Câu 24. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- (A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh (B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh (D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 25. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- (A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 3

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) -6067 (B) -6071 (C) 6071 (D) 6067

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- ☐ A $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$ ☐ B $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$ ☐ C $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$ ☐ D $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☐ A Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
☐ B Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
☐ D Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- ☐ A Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$ ☐ B Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
☐ C Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$ ☐ D Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☐ A Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
☐ B Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
☐ C Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
☐ D Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 8 (B) 10 (C) 7 (D) 11

Câu 32. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 1 (B) 0101 (C) 01 (D) 0

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
(B) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác
(C) Không có gì sai trong chứng minh này
(D) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 34. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (10)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (10), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (11)$$

Theo giả thiết quy nạp, (11) đúng, và do đó (10) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ B Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
- ☐ C Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
- ☐ D Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 36. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- ☐ A Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ không là $O(g(x)/2)$
- ☐ B Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ là $O(g(x)/2)$
- ☐ C Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ không là $O(f(x)/2)$
- ☐ D Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ là $O(f(x)/2)$

Câu 37. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- ☐ A $g(x)$ là $O(f(x))$
- ☐ B $f(x)$ là $O(g(x))$
- ☐ C $f(x)$ là $\Theta(g(x))$
- ☐ D $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 38. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ A $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- ☐ B $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- ☐ C $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
- ☐ D $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Câu 39. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 2T(n/3) + O(1)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O -lớn.

- ☐ A $O(n)$
- ☐ B $O(\log n)$
- ☐ C $O(1)$
- ☐ D $O(n^{\log_3 2})$

Câu 40. Chọn hàm có độ tăng (theo ký hiệu O -lớn) chậm nhất trong số các hàm sau.

- ☐ A $f(n) = \log n$
- ☐ B $f(n) = n^2$
- ☐ C $f(n) = n \log n$
- ☐ D $f(n) = 7n$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 024

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. C	07. D	13. B	18. B	24. D	30. B	36. B
02. C	08. D	14. D	19. B	25. D	31. D	37. A
03. A	09. C	15. D	20. A	26. B	32. C	38. C
04. B	10. B	16. D	21. A	27. D	33. D	39. D
05. C	11. B	17. D	22. C	28. B	34. B	40. A
06. B	12. B		23. D	29. A	35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 025

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

- Lưu ý:** - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho p , q , và r là các mệnh đề sau:

p = "Tàu đến muộn."
 q = "Giám đốc đến đúng giờ."
 r = "Tuần đến công ty trước giám đốc."

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc."

- ☒ A $(p \wedge q) \vee q$ ☐ B $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ C $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ ☐ D $(p \wedge q) \rightarrow q$

Câu 02. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn"

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☒ A $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ B $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ C $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ D $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 03. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng "với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương"?

- ☒ A $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0)$ ☐ B $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ C $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ ☐ D $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 04. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$."

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
☐ B Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
☐ D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

Câu 05. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề " $1 = 2$ ". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
- ☐ B Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
- ☐ C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
- ☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 06. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Cả Alice và Peter đều nói thật
- ☐ B Alice nói thật và Peter nói dối
- ☐ C Cả Alice và Peter đều nói dối
- ☐ D Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 07. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
- ☐ B $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
- ☐ C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
- ☐ D $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 08. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \oplus y$
- ☐ B $x \vee y$
- ☐ C $x \leftrightarrow y$
- ☐ D $x \wedge y$

Câu 09. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ A Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
- ☐ B Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
- ☐ C Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
- ☐ D Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Câu 10. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- (A) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (B) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (C) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (D) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 11. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
 (B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
 (C) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
 (D) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 12. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- (A) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
 (B) $x \vee y \vee z$
 (C) $x \wedge y \wedge z$
 (D) $x \oplus y \oplus z$

Câu 13. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- (A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$
 (B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
 (C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$
 (D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 14. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
 (B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
 (C) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
 (D) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 15. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
 (B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
 (C) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
 (D) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Câu 16. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
☐ (B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
☐ (C) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$
☐ (D) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- ☐ (A) 1
 ☐ (B) 3
 ☐ (C) 4
 ☐ (D) 2

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- ☐ (A) 2
 ☐ (B) 4
 ☐ (C) 1
 ☐ (D) 3

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- ☐ (A) 43750
 ☐ (B) 43800
 ☐ (C) 44200
 ☐ (D) 42525

Câu 20. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 1210
 ☐ (B) 500
 ☐ (C) 1044
 ☐ (D) 484

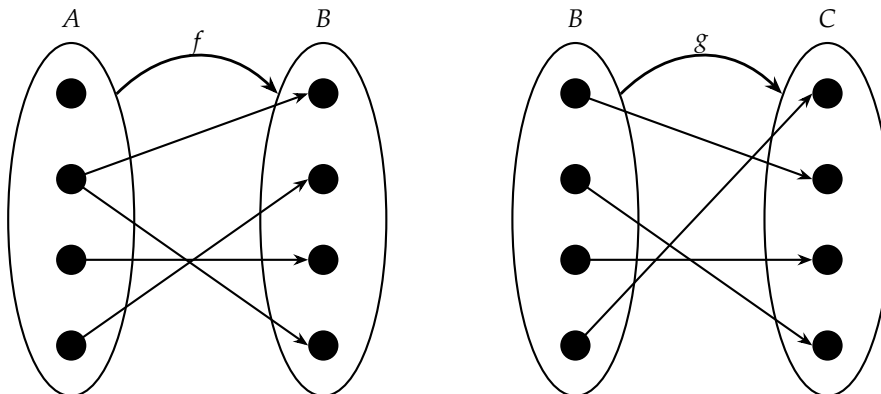
Câu 21. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 4
 ☐ (B) 1
 ☐ (C) 2
 ☐ (D) 3

Câu 22. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- ☐ (A) R là quan hệ tương đương
☐ (B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
☐ (C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
☐ (D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

Câu 23. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- ☐ (A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
 ☐ (B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
☐ (C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
 ☐ (D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

☐ A $A \subset A$
☐ B $B \subseteq A$

☐ C A là tập hữu hạn
 ☐ D Cả ba phát biểu khác đều sai

☒ **A** $A = B = \mathbb{Z}$
☐ **B** $A = B = \mathbb{N}$
☐ **C** $A = B = \mathbb{R}$
☐ **D** $A = B = \mathbb{Q}$

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Ⓐ -6067 Ⓑ -6071 Ⓒ 6071 Ⓓ 6067

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☐ A Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
☐ B Không có gì sai trong chứng minh này
☐ C Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
☐ D Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở

(A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Trang 5/9 - Mã đề thi 025

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ B Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ C Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
- ☐ D Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (7)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 0. \quad (9)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ B Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
- ☐ C Chứng minh này sai vì đẳng thức (7) ở bước quy nạp không chính xác
- ☐ D Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- ☒ A $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$
- ☐ B $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$
- ☐ C $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$
- ☐ D $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$

Câu 32. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (B) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (D) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 11 (B) 10 (C) 8 (D) 7

Câu 34. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(C) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
(D) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$
(C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$ (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- (A) $\log_a n$ (B) b^k (C) $\log_b n$ (D) a^k

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) $g(x)$ là $O(f(x))$ (B) $f(x)$ là $O(g(x))$ (C) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (D) $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 38. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(n \log n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^2 \log n)$ (D) $O(n)$

Câu 39. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

☐ (A) $n!$

☐ (B) $n \log n + 3n^2$

☐ (C) 2^n

☐ (D) $n \log n + 3 \log \log n$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thore (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

☐ (A) $f(n) = O(n \log n)$

☐ (B) Không áp dụng được Định lý thore với hệ thức đã cho

☐ (C) $f(n) = O(n^{2.32})$

☐ (D) $f(n) = O(n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 025

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☐ C	07. ☐ D	12. ☐ B	18. ☐ D	24. ☐ D	30. ☐ B	36. ☐ C
02. ☐ D	08. ☐ C	13. ☐ B	19. ☐ C	25. ☐ C	31. ☐ C	37. ☐ A
03. ☐ A	09. ☐ D	14. ☐ D	20. ☐ A	26. ☐ B	32. ☐ A	38. ☐ A
04. ☐ A	10. ☐ A	15. ☐ D	21. ☐ C	27. ☐ D	33. ☐ A	39. ☐ D
05. ☐ A	11. ☐ D	16. ☐ B	22. ☐ B	28. ☐ C	34. ☐ A	40. ☐ C
06. ☐ C		17. ☐ A	23. ☐ C	29. ☐ A	35. ☐ B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 026

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ A $(\forall x (P(x)) \vee (\forall x Q(x))) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ ☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \neq (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ C $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ ☐ D $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ D $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Câu 03. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Cả Alice và Peter đều nói dối ☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ C Alice nói thật và Peter nói dối ☐ D Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 04. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ A Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ B Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
☐ C Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
☐ D Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 05. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ B $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ C $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ D Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 06. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$ ☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
☐ C $\exists x P(x, \text{Tuấn})$ ☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 07. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 (B) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
 (C) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 (D) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 08. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- (A) $x \oplus y \oplus z$ (B) $x \vee y \vee z$ (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ (D) $x \wedge y \wedge z$

Câu 09. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- (A) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (B) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (C) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (D) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- (A) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ (B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
 (C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$ (D) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$

Câu 11. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- (A) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$ (B) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
 (C) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ (D) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$

Câu 12. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- (A) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ (B) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
 (C) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ (D) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 13. Một *bản đồ* (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một *cách tô màu khả thi với 2 màu* (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một *đồ thị* (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một *cách tô màu* (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

(A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

(B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

(C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

(D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 14. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A)** Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
(B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
(C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
(D) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

Câu 15. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$
 $q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$
 $r = \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- (A)** $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ **(B)** $(p \wedge q) \vee q$ **(C)** $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ **(D)** $(p \wedge q) \rightarrow q$

Câu 16. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa (power set)* của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A)** $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ **(B)** $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ **(D)** $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- (A)** 43800 **(B)** 43750 **(C)** 42525 **(D)** 44200

Câu 18. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- (A)** $A = B = \mathbb{Z}$ **(B)** $A = B = \mathbb{N}$ **(C)** $A = B = \mathbb{R}$ **(D)** $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 19. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- (A)** $A \subset A$ **(B)** A là tập hữu hạn
(C) $B \subseteq A$ **(D)** Cả ba phát biểu khác đều sai

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

- (A)** $\emptyset \in \{\emptyset\}$ **(B)** $\emptyset \in \emptyset$ **(C)** $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ **(D)** $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- (A)** 1210 **(B)** 484 **(C)** 500 **(D)** 1044

Câu 22. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

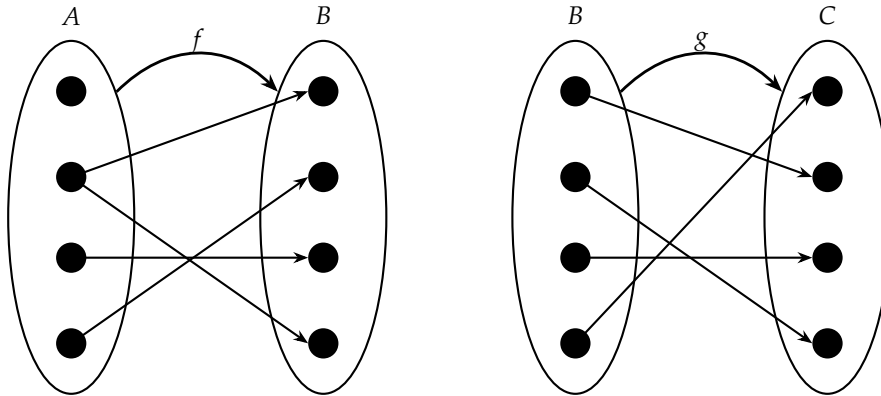
- (A) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
 (B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
 (C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
 (D) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

Câu 23. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1

Câu 24. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- (A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh (B) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
 (C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh (D) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

Câu 25. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- (A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
 (B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
 (C) R là quan hệ tương đương
 (D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (1)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (2)$$

$$= 0. \quad (3)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
 (B) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 (C) Chứng minh này sai vì đẳng thức (1) ở bước quy nạp không chính xác
 (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
 (B) Không có gì sai trong chứng minh này
 (C) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
 (D) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở

Câu 28. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j + 1)$ (B) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k + 1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j + 1)$ (D) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k + 1)$

Câu 29. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng
 (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
 (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
 (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 340 (B) 398 (C) 468 (D) 832

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) 6071 (B) -6067 (C) -6071 (D) 6067

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

(A) 10

(B) 11

(C) 7

(D) 8

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (4)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (4), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (5)$$

Theo giả thiết quy nạp, (5) đúng, và do đó (4) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
- (B) Không có gì sai trong chứng minh này
- (C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- (D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (7)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☐ A Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ B Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ C Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ D Chứng minh này là sai vì đẳng thức (6) không chính xác

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo Định lý thore (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ A $f(n) = O(-10n/11)$
- ☐ B $f(n) = O(n)$
- ☐ C Không áp dụng được Định lý thore với hệ thức đã cho
- ☐ D $f(n) = O(n \log n)$

Câu 37. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- ☐ A $g(x)$ là $O(f(x))$
- ☐ B $f(x)$ là $O(g(x))$
- ☐ C $f(x)$ là $\Theta(g(x))$
- ☐ D $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 38. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ A $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- ☐ B $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- ☐ C $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
- ☐ D $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thore (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ A Không áp dụng được Định lý thore với hệ thức đã cho
- ☐ B $f(n) = O(n)$
- ☐ C $f(n) = O(n^{2.32})$
- ☐ D $f(n) = O(n \log n)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

- Ⓐ Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy
- Ⓑ Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy
- Ⓒ Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy
- Ⓓ Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 026

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. D	07. D	13. B	19. D	25. B	30. D	36. D
02. D	08. B	14. B	20. B	26. D	31. C	37. A
03. C	09. B	15. C	21. A	27. D	32. B	38. C
04. C	10. B	16. B	22. A	28. D	33. D	39. C
05. C	11. D	17. D	23. B	29. D	34. A	40. B
06. B	12. B	18. C	24. D		35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 027

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 02. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ A $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
☐ B $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
☐ C $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ D $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$

Câu 03. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$
☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$
☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 04. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ B $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
☐ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ D $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 05. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là nghịch đảo nhân (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ B $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ C $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ D $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 06. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- (A) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
- (B) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
- (C) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
- (D) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Câu 07. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- (A) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
- (B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
- (C) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
- (D) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 08. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
- (B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
- (C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
- (D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 09. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
- (B) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
- (C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
- (D) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- (A) $x \oplus y \oplus z$
- (B) $x \wedge y \wedge z$
- (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
- (D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ B $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ C Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ D $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

Câu 12. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ ☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
☐ C $\exists x P(x, \text{Tuấn})$ ☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 13. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 14. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
☐ B Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
☐ D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

Câu 15. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Peter nói thật và Alice nói dối ☐ B Alice nói thật và Peter nói dối
☐ C Cả Alice và Peter đều nói dối ☐ D Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 16. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- ☐ A R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
☐ B R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
☐ C R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
☐ D R là quan hệ tương đương

Câu 17. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☐ A $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$ ☐ B $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
☐ C $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ ☐ D $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

Câu 18. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- ☐ A 101 ☐ B 103 ☐ C 100 ☐ D 102

Câu 19. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
- (B) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
- (C) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
- (D) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- (A) 4
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 1

Câu 21. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- (A) 4
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

Câu 22. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- (A) 31
- (B) 37
- (C) 28
- (D) 32

Câu 23. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- (A) 500
- (B) 1044
- (C) 1210
- (D) 484

Câu 24. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- (A) 43750
- (B) 44200
- (C) 43800
- (D) 42525

Câu 25. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 1
- (D) 3

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) -6067
- (B) -6071
- (C) 6071
- (D) 6067

Câu 27. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- (B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- (C) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- (D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- (A)** Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương $n, a_n \leq 4^n$
 (B) Với mọi số nguyên dương $n, a_n \leq n$
 (C) Với mọi số nguyên dương $n, a_n \leq 5 \cdot 2^n$
 (D) Với mọi số nguyên dương $n, a_n \leq 2 \cdot 3^n$

Câu 30. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- ☐ A 01
 ☐ B 0101
 ☐ C 0
 ☐ D 1

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- Ⓐ 468 Ⓑ 832 Ⓒ 340 Ⓓ 398

Câu 32. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A)** Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☐ A Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
☐ B Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
☐ D Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 1$) (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$) (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 1$) (D) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 2$)

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 8 (B) 7 (C) 11 (D) 10

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- (A) $f(n) = O(n \log n)$
 (B) $f(n) = O(n^{2.32})$
 (C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
 (D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```
FIBMERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
     $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$ , với  $n = f_\ell \rangle\rangle$ 
    if  $n > 1$ 
         $m := f_{\ell-1}$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
        FIBMERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
        FIBMERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
        MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
```

```
MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
     $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n] \rangle\rangle$ 
     $i := 1; j := m+1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
        if  $j > n$  then
             $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
        else if  $i > m$  then
             $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
        else if  $A[i] < A[j]$  then
             $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
        else
             $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
         $A[k] := B[k]$ 
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(\ell f_\ell)$ (B) $O(\ell^2)$ (C) $O(f_\ell \log \ell)$ (D) $O(\ell \log \ell)$

Câu 38. Chọn hàm có độ tăng (theo ký hiệu O -lớn) chậm nhất trong số các hàm sau.

- (A) $f(n) = 7n$ (B) $f(n) = n^2$ (C) $f(n) = \log n$ (D) $f(n) = n \log n$

Câu 39. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ không là $O(f(x)/2)$
 (B) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ là $O(f(x)/2)$
 (C) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ là $O(g(x)/2)$
 (D) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ không là $O(g(x)/2)$

Câu 40. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```
MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):  
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$  $\rangle\rangle$   
  if  $n > 1$   
     $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con $\rangle\rangle$   
    MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  đệ quy $\rangle\rangle$   
    MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  đệ quy $\rangle\rangle$   
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con $\rangle\rangle$ 
```

```
MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):  
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$  $\rangle\rangle$   
   $i := 1; j := m+1$   
  for  $k := 1$  to  $n$  do  
    if  $j > n$  then  
       $B[k] := A[i]; i := i+1$   
    else if  $i > m$  then  
       $B[k] := A[j]; j := j+1$   
    else if  $A[i] < A[j]$  then  
       $B[k] := A[i]; i := i+1$   
    else  
       $B[k] := A[j]; j := j+1$   
  for  $k := 1$  to  $n$  do  
     $A[k] := B[k]$ 
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

A $O(\log n)$

B $O(n)$

C $O(n^2)$

D $O(n \log n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 027

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. D	07. B	12. D	18. D	24. B	30. A	36. B
02. D	08. D	13. C	19. B	25. A	31. B	37. A
03. A	09. A	14. B	20. D	26. B	32. D	38. C
04. A	10. D	15. B	21. D	27. D	33. D	39. C
05. C	11. A	16. B	22. A	28. B	34. A	40. D
06. D		17. C	23. C	29. A	35. C	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 028

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☒ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ ☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
☐ C $\exists x P(x, \text{Tuấn})$ ☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 02. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

p = “Tàu đến muộn.”
 q = “Giám đốc đến đúng giờ.”
 r = “Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

- ☒ A $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ B $(p \wedge q) \vee q$ ☐ C $(p \wedge q) \rightarrow q$ ☐ D $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☒ A $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ ☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ C $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ ☐ D $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

Câu 04. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Cả Alice và Peter đều nói thật ☐ B Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ C Peter nói thật và Alice nói dối ☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 05. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ B $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ C $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ D Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 06. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- (A) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 (B) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 (C) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
 (D) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Câu 07. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
 (B) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
 (C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
 (D) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp

Câu 08. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
 (B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
 (C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
 (D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 09. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- (A) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (B) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (C) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (D) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 10. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- (A) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
 (B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
 (C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
 (D) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 11. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
 (B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
 (C) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
 (D) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 12. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- Ⓐ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$ Ⓑ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$
 Ⓒ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$ Ⓓ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

Câu 13. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- Ⓐ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
 Ⓑ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
 Ⓒ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 Ⓓ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

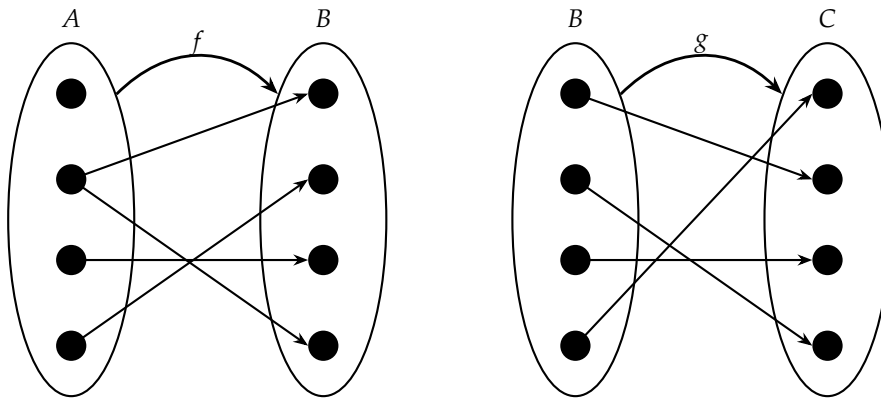
Câu 14. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là nghịch đảo nhân (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- Ⓐ $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ Ⓑ $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
 Ⓒ $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ Ⓓ $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 15. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- Ⓐ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$ Ⓑ $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
 Ⓒ $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$ Ⓓ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- (A) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

- (B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Biểu thức nào là sai?

- (A) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (B) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (D) $\emptyset \in \emptyset$

Câu 18. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- (A) 32 (B) 37 (C) 31 (D) 28

Câu 19. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- (A) $A \subset A$ (B) A là tập hữu hạn
(C) $B \subseteq A$ (D) Cả ba phát biểu khác đều sai

Câu 20. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- (A) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$ (B) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$
(C) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$ (D) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

Câu 21. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- (A) 42525 (B) 43800 (C) 44200 (D) 43750

Câu 22. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- (A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{N}$ (C) $A = B = \mathbb{Q}$ (D) $A = B = \mathbb{Z}$

Câu 23. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 24. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 185 (B) 170 (C) 165 (D) 195

Câu 25. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- (A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
(B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
(C) R là quan hệ tương đương
(D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 1$) (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 1$) (C) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$) (D) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 2$)

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ B Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ C Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
- ☐ D Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☒ A Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- ☐ B Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☒ A Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- ☐ B Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- ☐ C Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- ☐ D Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- ☒ A Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
- ☐ B Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- ☐ C Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- ☐ D Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- Ⓐ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ Ⓑ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
 Ⓒ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$ Ⓓ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

Câu 32. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- Ⓐ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ Ⓑ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ Ⓒ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ Ⓓ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- Ⓐ 398 Ⓑ 832 Ⓒ 468 Ⓓ 340

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- Ⓐ -6071 Ⓑ 6071 Ⓒ -6067 Ⓓ 6067

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (7)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 0. \quad (9)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- Ⓐ Chứng minh này sai vì đẳng thức (7) ở bước quy nạp không chính xác
 Ⓑ Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 Ⓒ Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
 Ⓓ Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai

Câu 36. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
for j := 2 to m do
  b := b + 2

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- Ⓐ $O(n)$ Ⓑ $O(m + n)$ Ⓒ $O(m)$ Ⓓ $O(m \cdot n)$

Câu 37. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```

FIBMERGESORT(A[1...n]):
  ⌈Sắp xếp trộn dãy A[1...n], với n = f_ℓ⌋
  if n > 1
    m := f_{ℓ-1} ⌈Tách thành hai mảng con⌋
    FIBMERGESORT(A[1...m]) ⌈Đệ quy⌋
    FIBMERGESORT(A[m+1...n]) ⌈Đệ quy⌋
    MERGE(A[1...n], m) ⌈Trộn hai mảng con⌋

```

```

MERGE(A[1...n], m):
  ⌈Trộn hai mảng A[1...m] và A[m+1...n]⌋
  i := 1; j := m + 1
  for k := 1 to n do
    if j > n then
      B[k] := A[i]; i := i + 1
    else if i > m then
      B[k] := A[j]; j := j + 1
    else if A[i] < A[j] then
      B[k] := A[i]; i := i + 1
    else
      B[k] := A[j]; j := j + 1
  for k := 1 to n do
    A[k] := B[k]

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- Ⓐ $O(\ell f_\ell)$ Ⓑ $O(\ell^2)$ Ⓒ $O(f_\ell \log \ell)$ Ⓓ $O(\ell \log \ell)$

Câu 38. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- Ⓐ $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
 Ⓑ $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
 Ⓒ $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
 Ⓓ $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Câu 39. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

- Ⓐ $n!$ Ⓑ $n \log n + 3n^2$ Ⓒ 2^n Ⓓ $n \log n + 3 \log \log n$

Câu 40. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

```

COMPUTESUM(n):
  if n = 1 then
    return 3
  y := COMPUTESUM(n - 1)
  return ◇

```

Cần thay $\diamond$ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

- Ⓐ $y + (n+2)n^2$ Ⓑ $(y+2)y^2$ Ⓒ y Ⓓ $y + n$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 028

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

- | | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 01. A | 07. D | 13. A | 19. D | 24. A | 30. C | 36. B |
| 02. D | 08. D | 14. B | 20. B | 25. B | 31. C | 37. A |
| 03. B | 09. B | 15. C | 21. C | 26. B | 32. A | 38. D |
| 04. B | 10. B | 16. B | 22. A | 27. D | 33. B | 39. D |
| 05. C | 11. D | 17. D | 23. D | 28. B | 34. A | 40. A |
| 06. D | 12. C | 18. C | | 29. A | 35. C | |

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 029

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

(A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

(B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

(C) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

(D) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền D nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

(B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

(C) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

(D) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

Câu 03. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$

$q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$

$r = \text{“Tuấn đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

(A) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

(B) $(p \wedge q) \rightarrow q$

(C) $(p \wedge q) \vee q$

(D) $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Câu 04. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

(A) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

(B) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

(C) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

(D) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(**Chú ý:** Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- A** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$ **B** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$
- C** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$ **D** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- A** $x \vee y \vee z$ **B** $x \oplus y \oplus z$ **C** $x \wedge y \wedge z$ **D** $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 07. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A** Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
B Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp

Câu 08. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- A** Alice nói thật và Peter nói dối **B** Cả Alice và Peter đều nói thật
C Peter nói thật và Alice nói dối **D** Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 09. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- A** $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ **B** $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
C $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$ **D** $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- A** Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
B Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
C Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
D Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 11. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ (A) Cả Alice và Peter đều nói thật ☐ (B) Peter nói thật và Alice nói dối
☐ (C) Alice nói thật và Peter nói dối ☐ (D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 12. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☒ (A) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ (B) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
☐ (C) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☐ (D) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 13. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☒ (A) $x \vee y$ ☐ (B) $x \wedge y$ ☐ (C) $x \oplus y$ ☐ (D) $x \leftrightarrow y$

Câu 14. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☒ (A) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$ ☐ (B) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ (C) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$ ☐ (D) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$

Câu 15. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☒ (A) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ (B) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ (C) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ (D) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- ☒ (A) 43750 ☐ (B) 42525 ☐ (C) 44200 ☐ (D) 43800

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- ☒ (A) 1 ☐ (B) 3 ☐ (C) 4 ☐ (D) 2

Câu 18. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

☐ (A) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

☐ (B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

☐ (C) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

☐ (D) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

Câu 19. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

☐ (A) $A = B = \mathbb{Q}$

☐ (B) $A = B = \mathbb{R}$

☐ (C) $A = B = \mathbb{Z}$

☐ (D) $A = B = \mathbb{N}$

Câu 20. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

☐ (A) 195

☐ (B) 170

☐ (C) 185

☐ (D) 165

Câu 21. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

☐ (A) 103

☐ (B) 100

☐ (C) 101

☐ (D) 102

Câu 22. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

☐ (A) A là tập hữu hạn

☐ (B) Cả ba phát biểu khác đều sai

☐ (C) $A \subset A$

☐ (D) $B \subseteq A$

Câu 23. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

☐ (A) 2

☐ (B) 3

☐ (C) 4

☐ (D) 1

Câu 24. Biểu thức nào là sai?

☐ (A) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

☐ (B) $\emptyset \in \emptyset$

☐ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$

☐ (D) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Câu 25. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

☐ (A) 500

☐ (B) 1210

☐ (C) 484

☐ (D) 1044

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

☐ (A) 10

☐ (B) 7

☐ (C) 8

☐ (D) 11

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

☐ (A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$

☐ (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$

☐ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$

☐ (D) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (1)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (2)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ B Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- ☐ A -6071
- ☐ B 6067
- ☐ C -6067
- ☐ D 6071

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- ☐ A Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ B Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ C Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ D Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 31. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- ☐ A Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- ☐ B Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- ☐ C Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
- ☐ D Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (3)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (4)$$

$$= 0. \quad (5)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- ☒ B Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
- ☒ C Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☒ D Chứng minh này sai vì đẳng thức (3) ở bước quy nạp không chính xác

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- ☒ A Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
- ☐ B Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
- ☒ C Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
- ☐ D Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$

Câu 34. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- ☒ A 01
- ☒ B 0
- ☒ C 1
- ☒ D 0101

Câu 35. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☒ A Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- ☒ B Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- ☒ C Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- ☒ D Con ngựa cuối cùng có màu trắng

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 2T(n/3) + O(1)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O -lớn.

- ☒ A $O(n^{\log_3 2})$
- ☒ B $O(1)$
- ☒ C $O(n)$
- ☒ D $O(\log n)$

Câu 37. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ A $O(n^2)$ ☐ B $O(n \log n)$ ☐ C $O(n^2 \log n)$ ☐ D $O(n)$

Câu 38. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```
MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):  
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$  $\rangle\rangle$   
  if  $n > 1$   
     $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  
    MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  
    MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  
  
```

```
MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):  
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$  $\rangle\rangle$   
   $i := 1; j := m+1$   
  for  $k := 1$  to  $n$  do  
    if  $j > n$  then  
       $B[k] := A[i]; i := i+1$   
    else if  $i > m$  then  
       $B[k] := A[j]; j := j+1$   
    else if  $A[i] < A[j]$  then  
       $B[k] := A[i]; i := i+1$   
    else  
       $B[k] := A[j]; j := j+1$   
  for  $k := 1$  to  $n$  do  
     $A[k] := B[k]$ 
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ A $O(n \log n)$ ☐ B $O(n)$ ☐ C $O(\log n)$ ☐ D $O(n^2)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo Định lý thore (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ A Không áp dụng được Định lý thore với hệ thức đã cho
☐ B $f(n) = O(n \log n)$
☐ C $f(n) = O(n)$
☐ D $f(n) = O(-10n/11)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thore (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ A $f(n) = O(n \log n)$
☐ B Không áp dụng được Định lý thore với hệ thức đã cho
☐ C $f(n) = O(n^{2.32})$
☐ D $f(n) = O(n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 029

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. A	07. D	13. D	19. B	25. B	31. A	37. B
02. C	08. D	14. A	20. C	26. D	32. B	38. A
03. A	09. A	15. C	21. D	27. D	33. D	39. B
04. D	10. C	16. C	22. B	28. B	34. A	40. C
05. A	11. C	17. B	23. D	29. A	35. B	
06. A	12. B	18. B	24. B	30. A	36. A	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 030

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Với các số thực x và y , số y được gọi là nghịch đảo cộng (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- (A) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 02. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------|-----|
| $1 = 2$ | (Điều phải chứng minh) | (1) |
| $\Leftrightarrow 2 = 1$ | (Đổi xứng) | (2) |
| $\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$ | (Cộng theo vế (1) và (2)) | (3) |
| $\Leftrightarrow 3 = 3$ | | (4) |

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 03. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
(B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
(C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
(D) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo

Câu 04. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
(B) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
(C) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
(D) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- Ⓐ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
 Ⓑ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 Ⓒ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
 Ⓓ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 06. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- Ⓐ $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ Ⓑ $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
 Ⓒ $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ Ⓓ $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 07. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$
 $q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$
 $r = \text{“Tuấn đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

- Ⓐ $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ Ⓑ $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ Ⓒ $(p \wedge q) \vee q$ Ⓓ $(p \wedge q) \rightarrow q$

Câu 08. Giả sử biến x xác định trên miền D . Phát biểu nào sau đây là sai?

- Ⓐ $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ Ⓑ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
 Ⓒ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ Ⓓ $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

Câu 09. Giả sử biến x xác định trên miền D nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
 Ⓑ Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
 Ⓒ $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
 Ⓓ $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- Ⓐ Alice nói thật và Peter nói dối Ⓑ Cả Alice và Peter đều nói dối
 Ⓒ Peter nói thật và Alice nói dối Ⓓ Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- Ⓐ Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 Ⓑ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
 Ⓒ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 Ⓓ Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$

Câu 12. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☒ A $\neg(x \wedge y \wedge z)$
☐ B $x \vee y \vee z$
☐ C $x \wedge y \wedge z$
☐ D $x \oplus y \oplus z$

Câu 13. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☒ A $x \vee y$
☐ B $x \wedge y$
☐ C $x \oplus y$
☐ D $x \leftrightarrow y$

Câu 14. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ C Peter nói thật và Alice nói dối
☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 15. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☒ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$
☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$
☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

Câu 16. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- ☒ A $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$
☐ B $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
☐ C $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$
☐ D $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

Câu 17. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

(B) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

(C) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

(D) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

Câu 18. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

(A) 500

(B) 1210

(C) 484

(D) 1044

Câu 19. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

(A) 28

(B) 31

(C) 32

(D) 37

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 4

(B) 2

(C) 3

(D) 1

Câu 21. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 195

(B) 165

(C) 170

(D) 185

Câu 22. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

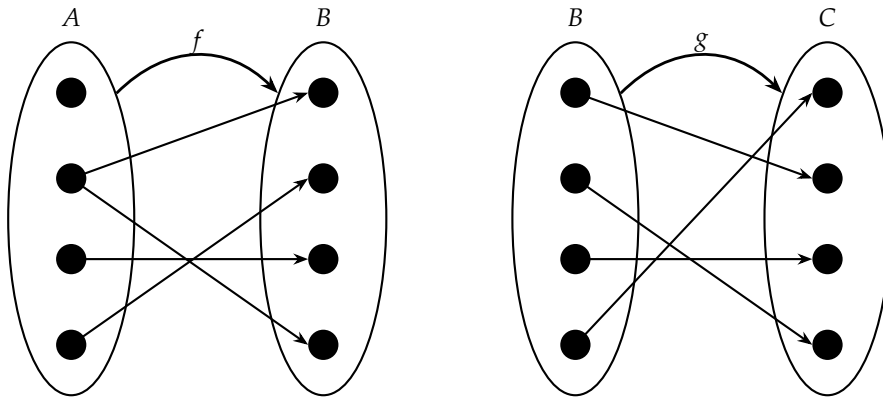
(A) R là quan hệ tương đương

(B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

(C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

(D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

Câu 23. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

(B) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

(C) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

(D) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 24. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

(A) 102

(B) 101

(C) 100

(D) 103

Câu 25. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2

(B) 4

(C) 1

(D) 3

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Con ngựa cuối cùng có màu trắng

(B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

(D) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (*Well-ordering principle*).

(A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

(B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

(C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

(D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

(A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

(B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$

(C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

(D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 29. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

(A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☒ B Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☒ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☒ D Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☒ A Không có gì sai trong chứng minh này
- ☒ B Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
- ☒ C Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- ☒ D Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- ☒ A -6067
- ☒ B 6067
- ☒ C -6071
- ☒ D 6071

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ " bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (7)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (7), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (8)$$

Theo giả thiết quy nạp, (8) đúng, và do đó (7) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
- (B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- (C) Không có gì sai trong chứng minh này
- (D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (10)$$

$$= 0. \quad (11)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (B) Chứng minh này sai vì đẳng thức (9) ở bước quy nạp không chính xác
- (C) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

(A) 8

(B) 7

(C) 11

(D) 10

Câu 36. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

(A) $n \log n + 3 \log \log n$

(B) 2^n

(C) $n!$

(D) $n \log n + 3n^2$

Câu 37. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
for j := 2 to m do
  b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m)$

(B) $O(m \cdot n)$

(C) $O(n)$

(D) $O(m + n)$

Câu 38. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

(B) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

(C) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$

(D) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Câu 39. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$

Hãy chọn đáp án đúng.

(A) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

(B) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

(C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

(D) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$

Câu 40. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0, f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

FIBMERGESORT($A[1 \dots n]$):

$\langle\langle$ Sắp xếp trộn dãy $A[1 \dots n]$, với $n = f_\ell \rangle\rangle$

 if $n > 1$

$m := f_{\ell-1}$ $\langle\langle$ Tách thành hai mảng con $\rangle\rangle$

 FIBMERGESORT($A[1 \dots m]$) $\langle\langle$ Đệ quy $\rangle\rangle$

 FIBMERGESORT($A[m+1 \dots n]$) $\langle\langle$ Đệ quy $\rangle\rangle$

 MERGE($A[1 \dots n], m$) $\langle\langle$ Trộn hai mảng con $\rangle\rangle$

MERGE($A[1 \dots n], m$):

$\langle\langle$ Trộn hai mảng $A[1 \dots m]$ và $A[m+1 \dots n] \rangle\rangle$

$i := 1; j := m + 1$

 for $k := 1$ to n do

 if $j > n$ then

$B[k] := A[i]; i := i + 1$

 else if $i > m$ then

$B[k] := A[j]; j := j + 1$

 else if $A[i] < A[j]$ then

$B[k] := A[i]; i := i + 1$

 else

$B[k] := A[j]; j := j + 1$

 for $k := 1$ to n do

$A[k] := B[k]$

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(f_\ell \log \ell)$

(B) $O(\ell f_\ell)$

(C) $O(\ell \log \ell)$

(D) $O(\ell^2)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 030

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. A	07. B	13. D	19. B	25. D	31. C	37. D
02. D	08. B	14. A	20. D	26. B	32. C	38. D
03. B	09. A	15. C	21. D	27. D	33. D	39. D
04. A	10. A	16. C	22. B	28. B	34. D	40. B
05. C	11. B	17. C	23. C	29. D	35. C	
06. C	12. B	18. B	24. A	30. A	36. A	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 031

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

☐ (A) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (B) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (C) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (D) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 02. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

☐ (A) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

☐ (B) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$

☐ (C) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$

☐ (D) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$

Câu 03. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

☐ (A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

☐ (B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

☐ (C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

☐ (D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 04. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

p = “Tàu đến muộn.”
 q = “Giám đốc đến đúng giờ.”
 r = “Tuần đến công ty trước giám đốc.”

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

(A) $(p \wedge q) \rightarrow q$

(B) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

(C) $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(D) $(p \wedge q) \vee q$

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

(A) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

(B) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

(C) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

(D) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 06. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$

(B) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

(C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

(D) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 07. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo

(B) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

(C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

(D) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp

Câu 08. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Alice nói thật và Peter nói dối

(B) Cả Alice và Peter đều nói thật

(C) Peter nói thật và Alice nói dối

(D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

(A) $x \wedge y$

(B) $x \oplus y$

(C) $x \vee y$

(D) $x \leftrightarrow y$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

A $x \oplus y \oplus z$

B $x \wedge y \wedge z$

C $\neg(x \wedge y \wedge z)$

D $x \vee y \vee z$

Câu 11. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

A Cả Alice và Peter đều nói thật

B Peter nói thật và Alice nói dối

C Alice nói thật và Peter nói dối

D Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 12. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

B $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

D Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 13. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

B $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

C $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

D $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

Câu 14. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

B $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

D $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 15. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

A Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 16. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

A 28

B 37

C 32

D 31

Câu 17. Biểu thức nào là sai?

A $\emptyset \subseteq \emptyset$

B $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

C $\emptyset \in \{\emptyset\}$

D $\emptyset \in \emptyset$

Câu 18. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

A $A = B = \mathbb{Z}$

B $A = B = \mathbb{N}$

C $A = B = \mathbb{R}$

D $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 19. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 3

(B) 1

(C) 2

(D) 4

Câu 20. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- (A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
 (B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
 (C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
 (D) R là quan hệ tương đương

Câu 21. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

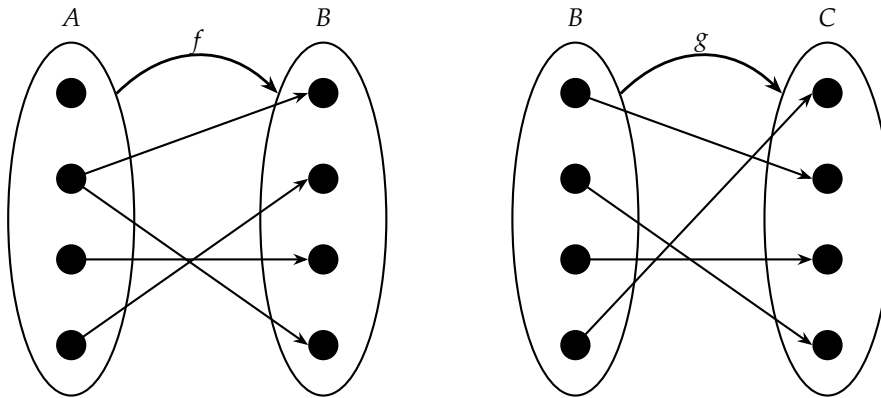
(A) 42525

(B) 43800

(C) 44200

(D) 43750

Câu 22. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- (A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
 (B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
 (C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
 (D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 23. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
 (B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
 (C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
 (D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 24. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 185
 (B) 170
 (C) 165
 (D) 195

Câu 25. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- (A) 500
 (B) 1210
 (C) 484
 (D) 1044

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- (B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- (C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- (D) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 11
- (B) 8
- (C) 10
- (D) 7

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu “ $n + 1 = n + 2$ ”. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- (B) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- (C) Không có gì sai trong chứng minh này
- (D) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k + 1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- (C) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
- (D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- Ⓐ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$ Ⓑ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$ Ⓒ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$ Ⓓ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (7)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (7), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (8)$$

Theo giả thiết quy nạp, (8) đúng, và do đó (7) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- Ⓐ Không có gì sai trong chứng minh này
 Ⓑ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
 Ⓒ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- Ⓐ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓑ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓒ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 Ⓓ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

(A) 398

(B) 832

(C) 468

(D) 340

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

(A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$

(B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

(C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

(D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 6071

(B) -6071

(C) 6067

(D) -6067

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

(A) Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy

(B) Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy

(C) Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy

(D) Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

(A) $\log_b n$

(B) a^k

(C) $\log_a n$

(D) b^k

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$

(B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

(C) $f(n) = O(-10n/11)$

(D) $f(n) = O(n)$

Câu 39. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n^2)$

(B) $O(n \log n)$

(C) $O(n)$

(D) $O(n^2 \log n)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
  for j := 2 to m do
    b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

☒ A $O(n)$

☐ B $O(m)$

☐ C $O(m + n)$

☐ D $O(m \cdot n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 031

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. C	07. D	12. B	18. C	24. A	30. A	36. C
02. D	08. A	13. A	19. A	25. B	31. C	37. A
03. A	09. D	14. B	20. A	26. B	32. C	38. A
04. B	10. D	15. C	21. C	27. A	33. B	39. B
05. C	11. D	16. D	22. B	28. B	34. A	40. C
06. C		17. D	23. D	29. A	35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 032

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ A Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ B Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
☐ C Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
☐ D Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 02. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \leftrightarrow y$ ☐ B $x \oplus y$ ☐ C $x \vee y$ ☐ D $x \wedge y$

Câu 03. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☐ A $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ ☐ B $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
☐ C $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ ☐ D $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 04. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ A $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$ ☐ B $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
☐ C $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$ ☐ D $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$

Câu 05. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- (A) Cả Alice và Peter đều nói dối
(C) Cả Alice và Peter đều nói thật

- (B) Peter nói thật và Alice nói dối
(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 06. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
(B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
(C) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
(D) $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

Câu 07. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 08. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- | | |
|---|---|
| <p>(A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$</p> | <p>(B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$</p> |
| <p>(C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$</p> | <p>(D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$</p> |

Câu 09. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- (A) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(B) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
(C) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
(D) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuần})))$
☐ B $\exists x P(x, \text{Tuần})$
☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuần})))$
☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuần}) \wedge \neg P(y, \text{Tuần}))$

Câu 11. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
☐ B Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
☐ D Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

Câu 12. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ C $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
☐ D $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 13. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$
 $q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$
 $r = \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- ☐ A $(p \wedge q) \rightarrow q$
☐ B $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$
☐ C $(p \wedge q) \vee q$
☐ D $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Câu 14. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ B $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ C $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ D Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 15. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Peter nói thật và Alice nói dối
 ☐ B Alice nói thật và Peter nói dối
☐ C Cả Alice và Peter đều nói dối
 ☐ D Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 16. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

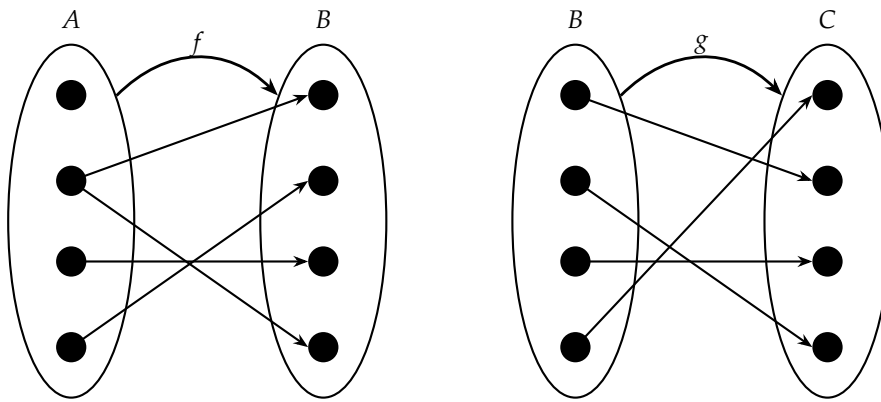
Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- ☐ A $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
 ☐ B $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
☐ C $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
 ☐ D $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

Câu 17. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- ☐ A $A = B = \mathbb{R}$
☐ B $A = B = \mathbb{Q}$
☐ C $A = B = \mathbb{N}$
☐ D $A = B = \mathbb{Z}$

Câu 18. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .



Hình 1: Các quan hệ f và g .

- ☐ A R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
- ☐ B R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
- ☐ C R là quan hệ tương đương
- ☐ D R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

Câu 19. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- ☐ A 1044
- ☐ B 484
- ☐ C 500
- ☐ D 1210

Câu 20. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 4
- ☐ B 2
- ☐ C 3
- ☐ D 1

Câu 21. Biểu thức nào là sai?

- ☐ A $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- ☐ B $\emptyset \subseteq \emptyset$
- ☐ C $\emptyset \in \emptyset$
- ☐ D $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 22. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- ☐ A 100
- ☐ B 103
- ☐ C 102
- ☐ D 101

Câu 23. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☐ A $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$
- ☐ B $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
- ☐ C $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
- ☐ D $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

Câu 24. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- ☐ A 3
- ☐ B 2
- ☐ C 1
- ☐ D 4

Câu 25. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
- ☐ B f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
- ☐ C f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
- ☐ D f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 26. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☒ A Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- ☐ B Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- ☐ C Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- ☐ D Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về *Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”* (Well-ordering principle).

- ☒ A Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ B Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ C Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ D Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- ☒ A 6067
- ☐ B -6071
- ☐ C 6071
- ☐ D -6067

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- ☒ A 7
- ☐ B 11
- ☐ C 10
- ☐ D 8

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (5)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (5), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (6)$$

Theo giả thiết quy nạp, (6) đúng, và do đó (5) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
 Ⓑ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
 Ⓒ Không có gì sai trong chứng minh này
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 31. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- Ⓐ 0 Ⓑ 1 Ⓒ 01 Ⓓ 0101

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- Ⓐ 832 Ⓑ 398 Ⓒ 340 Ⓓ 468

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- Ⓐ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 2)$ Ⓑ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} \ (n \geq 1)$ Ⓒ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 2)$ Ⓓ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \ (n \geq 1)$

Câu 34. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

- Ⓐ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ Ⓑ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ Ⓒ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ Ⓓ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- Ⓐ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ Ⓑ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$
 Ⓒ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$ Ⓓ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

- Ⓐ Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy
 Ⓑ Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy
 Ⓒ Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy
 Ⓓ Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- Ⓐ $\log_b n$ Ⓑ a^k Ⓒ $\log_a n$ Ⓓ b^k

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thọt (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- Ⓐ $f(n) = O(n)$
 Ⓑ Không áp dụng được Định lý thọt với hệ thức đã cho
 Ⓒ $f(n) = O(n \log n)$
 Ⓓ $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 39. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- Ⓐ $O(n^2)$ Ⓑ $O(n \log n)$ Ⓒ $O(n)$ Ⓓ $O(n^2 \log n)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo Định lý thọt (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- Ⓐ $f(n) = O(-10n/11)$
 Ⓑ Không áp dụng được Định lý thọt với hệ thức đã cho
 Ⓒ $f(n) = O(n)$
 Ⓓ $f(n) = O(n \log n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 032

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. B	07. B	13. B	19. D	25. C	31. C	37. A
02. A	08. D	14. B	20. B	26. B	32. A	38. D
03. A	09. A	15. B	21. C	27. D	33. D	39. B
04. B	10. A	16. B	22. C	28. B	34. C	40. D
05. A	11. A	17. A	23. C	29. B	35. B	
06. C	12. B	18. B	24. A	30. A	36. C	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 033

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ (A) Alice nói thật và Peter nói dối ☐ (B) Peter nói thật và Alice nói dối
☐ (C) Cả Alice và Peter đều nói dối ☐ (D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 02. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ (A) Peter nói thật và Alice nói dối ☐ (B) Alice nói thật và Peter nói dối
☐ (C) Cả Alice và Peter đều nói thật ☐ (D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ (B) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ (C) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ (D) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Câu 04. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ (A) $x \vee y$ ☐ (B) $x \wedge y$ ☐ (C) $x \leftrightarrow y$ ☐ (D) $x \oplus y$

Câu 05. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(**Chú ý:** Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- Ⓐ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$ Ⓑ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$
 Ⓒ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$ Ⓓ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

Câu 06. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- Ⓐ $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ Ⓑ $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
 Ⓒ $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ Ⓓ $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- Ⓐ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ Ⓑ $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
 Ⓒ $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ Ⓓ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- Ⓐ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 Ⓑ Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 Ⓒ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
 Ⓓ Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$

Câu 09. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
 Ⓑ Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
 Ⓒ Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
 Ⓓ Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo

Câu 10. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

p = “Tàu đến muộn.”
 q = “Giám đốc đến đúng giờ.”
 r = “Tuần đến công ty trước giám đốc.”

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- Ⓐ $(p \wedge q) \vee q$ Ⓑ $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ Ⓒ $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ Ⓓ $(p \wedge q) \rightarrow q$

Câu 11. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☒ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 12. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☒ A $\neg(x \wedge y \wedge z)$
☐ B $x \vee y \vee z$
☐ C $x \wedge y \wedge z$
☐ D $x \oplus y \oplus z$

Câu 13. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☒ A $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 14. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
☒ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 15. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☒ A $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
☐ B $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ C $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ D $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$

Câu 16. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- ☒ A $A = B = \mathbb{Q}$
☐ B $A = B = \mathbb{N}$
☐ C $A = B = \mathbb{Z}$
☐ D $A = B = \mathbb{R}$

Câu 17. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☒ A $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$
☐ B $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
☐ C $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
☐ D $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

Câu 18. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- ☒ A 2
☐ B 4
☐ C 1
☐ D 3

Câu 19. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- (A) 102 (B) 100 (C) 101 (D) 103

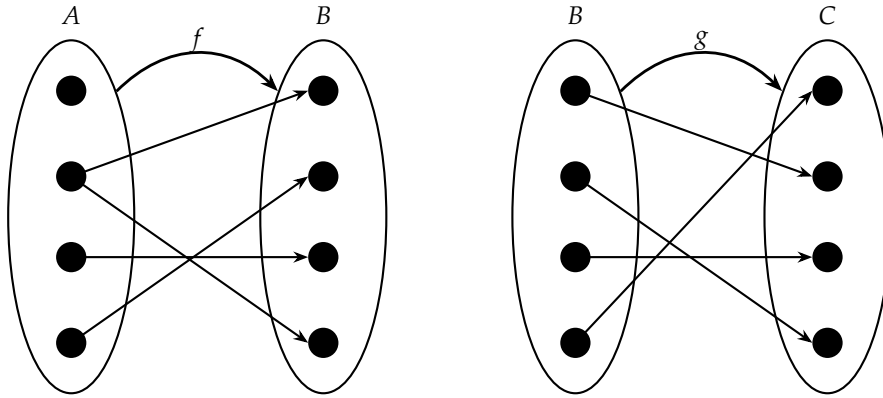
Câu 20. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- (A) 1210 (B) 500 (C) 1044 (D) 484

Câu 21. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 4 (B) 1 (C) 2 (D) 3

Câu 22. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- (A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh (B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh (D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 23. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1

Câu 24. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- (A) 28 (B) 32 (C) 31 (D) 37

Câu 25. Biểu thức nào là sai?

- (A) $\emptyset \in \emptyset$ (B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☐ A Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
☐ B Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
☐ D Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- ☐ A 6067 ☐ B 6071 ☐ C -6067 ☐ D -6071

Câu 28. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☐ A Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
☐ B Ít nhất một con ngựa có màu trắng
☐ C Con ngựa đầu tiên có màu trắng
☐ D Con ngựa cuối cùng có màu trắng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- ☐ A 340 ☐ B 398 ☐ C 832 ☐ D 468

Câu 30. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- ☐ A Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
☐ B Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
☐ C Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
☐ D Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 31. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

- ☐ A $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ ☐ B $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ ☐ C $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ ☐ D $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (1)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (2)$$

$$= 0. \quad (3)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- (B) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
- (C) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (D) Chứng minh này sai vì đẳng thức (1) ở bước quy nạp không chính xác

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 11
- (B) 10
- (C) 8
- (D) 7

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (B) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (C) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (D) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
- (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$
- (C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
- (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

- (A) Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy
- (B) Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy
- (C) Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy
- (D) Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy

Câu 37. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```

MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 

```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ A $O(n)$
☐ B $O(n \log n)$
☐ C $O(\log n)$
☐ D $O(n^2)$

Câu 38. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

```

COMPUTESUM( $n$ ):
  if  $n = 1$  then
    return 3
   $y := \text{COMPUTESUM}(n-1)$ 
  return  $\diamond$ 

```

Cần thay $\diamond$ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

- ☐ A $y + n$
☐ B $(y+2)y^2$
☐ C $y + (n+2)n^2$
☐ D y

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ A Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
☐ B $f(n) = O(n)$
☐ C $f(n) = O(n^{2.32})$
☐ D $f(n) = O(n \log n)$

Câu 40. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

 $a := 0$ 
 $b := 0$ 
for  $i := 1$  to  $n$  do
   $a := a+1$ 
for  $j := 2$  to  $m$  do
   $b := b+2$ 

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ A $O(n)$
☐ B $O(m)$
☐ C $O(m+n)$
☐ D $O(m \cdot n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 033

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

- | | | | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 01. ☐ C | 07. ☐ D | 13. ☐ C | 19. ☐ A | 25. ☐ A | 31. ☐ B | 37. ☐ B |
| 02. ☐ B | 08. ☐ C | 14. ☐ D | 20. ☐ A | 26. ☐ B | 32. ☐ B | 38. ☐ C |
| 03. ☐ B | 09. ☐ C | 15. ☐ C | 21. ☐ C | 27. ☐ D | 33. ☐ A | 39. ☐ C |
| 04. ☐ C | 10. ☐ B | 16. ☐ D | 22. ☐ B | 28. ☐ B | 34. ☐ A | 40. ☐ C |
| 05. ☐ A | 11. ☐ A | 17. ☐ C | 23. ☐ D | 29. ☐ C | 35. ☐ B | |
| 06. ☐ C | 12. ☐ B | 18. ☐ D | 24. ☐ C | 30. ☐ C | 36. ☐ C | |

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 034

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ B $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ C $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ D $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Câu 02. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
☐ B Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
☐ D Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

Câu 03. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☒ A $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ B $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
☐ C $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
☐ D Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 05. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ B Peter nói thật và Alice nói dối
☐ C Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 06. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ A $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ B $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
☐ C $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
☐ D $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 07. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$
 $q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$
 $r = \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- ☐ A $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
☐ B $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$
☐ C $(p \wedge q) \vee q$
☐ D $(p \wedge q) \rightarrow q$

Câu 08. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☐ A $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ B $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ C $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ D $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 09. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Cả Alice và Peter đều nói dối
 ☐ B Alice nói thật và Peter nói dối
☐ C Cả Alice và Peter đều nói thật
 ☐ D Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 10. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 11. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
☐ D $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

Câu 12. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- Ⓐ $x \leftrightarrow y$ Ⓑ $x \vee y$ Ⓒ $x \wedge y$ Ⓓ $x \oplus y$

Câu 13. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- Ⓐ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$ Ⓑ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
 Ⓒ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$ Ⓓ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 14. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- Ⓐ $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ Ⓑ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
 Ⓒ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$ Ⓓ $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 15. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là nghịch đảo nhân (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- Ⓐ $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ Ⓑ $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
 Ⓒ $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ Ⓓ $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 16. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
 Ⓑ f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
 Ⓒ f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
 Ⓓ f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- Ⓐ 1 Ⓑ 3 Ⓒ 4 Ⓓ 2

Câu 18. Biểu thức nào là sai?

- Ⓐ $\emptyset \in \emptyset$ Ⓑ $\emptyset \in \{\emptyset\}$ Ⓒ $\emptyset \subseteq \emptyset$ Ⓓ $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 19. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- Ⓐ 1044 Ⓑ 484 Ⓒ 500 Ⓓ 1210

Câu 20. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- Ⓐ $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$ Ⓑ $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$
 Ⓒ $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$ Ⓓ $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

Câu 21. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

(A) 37

(B) 31

(C) 32

(D) 28

Câu 22. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 1

(B) 4

(C) 3

(D) 2

Câu 23. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

(A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

(B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

(C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

(D) R là quan hệ tương đương

Câu 24. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

(A) 43750

(B) 44200

(C) 43800

(D) 42525

Câu 25. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 2

(B) 4

(C) 1

(D) 3

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

(A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

(B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

(C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

(D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

(A) 11

(B) 8

(C) 10

(D) 7

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (1)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (2)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ B Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này là sai vì đẳng thức (1) không chính xác

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- ☐ A $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$
- ☐ B $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$
- ☐ C $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$
- ☐ D $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- ☐ A -6071
- ☐ B 6067
- ☐ C 6071
- ☐ D -6067

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ " bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (3)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (3), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (4)$$

Theo giả thiết quy nạp, (4) đúng, và do đó (3) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Không có gì sai trong chứng minh này
- (B) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- (C) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
- (D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 32. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 1
- (B) 0101
- (C) 01
- (D) 0

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 398
- (B) 832
- (C) 468
- (D) 340

Câu 34. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- (B) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- (C) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- (D) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

(A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

(B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$

(C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

(D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

(A) $f(n) = O(n \log n)$

(B) $f(n) = O(n^{2.32})$

(C) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho

(D) $f(n) = O(n)$

Câu 37. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

(A) $n!$

(B) $n \log n + 3n^2$

(C) $n \log n + 3 \log \log n$

(D) 2^n

Câu 38. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

(A) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ là $O(f(x)/2)$

(B) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ không là $O(f(x)/2)$

(C) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ không là $O(g(x)/2)$

(D) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ là $O(g(x)/2)$

Câu 39. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
for j := 2 to m do
  b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(m)$

(B) $O(m \cdot n)$

(C) $O(m + n)$

(D) $O(n)$

Câu 40. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

(A) $O(n^2 \log n)$

(B) $O(n^2)$

(C) $O(n)$

(D) $O(n \log n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 034

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☐ D	07. ☐ B	13. ☐ B	18. ☐ A	24. ☐ B	30. ☐ A	36. ☐ B
02. ☐ C	08. ☐ D	14. ☐ B	19. ☐ D	25. ☐ D	31. ☐ C	37. ☐ C
03. ☐ C	09. ☐ A	15. ☐ D	20. ☐ B	26. ☐ B	32. ☐ C	38. ☐ D
04. ☐ B	10. ☐ D	16. ☐ D	21. ☐ B	27. ☐ A	33. ☐ B	39. ☐ C
05. ☐ D	11. ☐ C	17. ☐ A	22. ☐ D	28. ☐ B	34. ☐ A	40. ☐ D
06. ☐ C	12. ☐ A		23. ☐ C	29. ☐ A	35. ☐ B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 035

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☒ A $x \oplus y$ ☐ B $x \leftrightarrow y$ ☐ C $x \wedge y$ ☐ D $x \vee y$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ D $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☒ A $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ ☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \text{T}$
☐ C $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \text{T}$ ☐ D $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \neq (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

Câu 04. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☒ A $x \vee y \vee z$ ☐ B $x \wedge y \wedge z$ ☐ C $\neg(x \wedge y \wedge z)$ ☐ D $x \oplus y \oplus z$

Câu 05. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☒ A $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ ☐ B $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
☐ C $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$ ☐ D $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 06. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- (A) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 (B) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 (C) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
 (D) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Câu 07. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ (B) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
 (C) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ (D) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 08. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (*additive inverse*) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- (A) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (B) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (C) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
 (D) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$
 $q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$
 $r = \text{“Tuấn đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

- (A) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ (B) $(p \wedge q) \vee q$ (C) $(p \wedge q) \rightarrow q$ (D) $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Câu 10. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
 (B) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
 (C) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
 (D) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Câu 11. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
 (B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
 (C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
 (D) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó

Câu 12. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

(A) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

(B) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

(C) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

(D) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 13. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề " $1 = 2$ ". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

(A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

(B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

(D) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 14. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."
- Peter nói: "Alice luôn nói thật."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối

(B) Cả Alice và Peter đều nói thật

(C) Peter nói thật và Alice nói dối

(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 15. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: "Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối."

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Peter nói thật và Alice nói dối

(B) Alice nói thật và Peter nói dối

(C) Cả Alice và Peter đều nói dối

(D) Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 16. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

(A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

(B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

(C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ

(D) R là quan hệ tương đương

Câu 17. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

(B) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

(C) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

(D) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

Câu 18. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$

(B) Cả ba phát biểu khác đều sai

(C) A là tập hữu hạn

(D) $A \subset A$

Câu 19. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 3

(B) 1

(C) 2

(D) 4

Câu 20. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

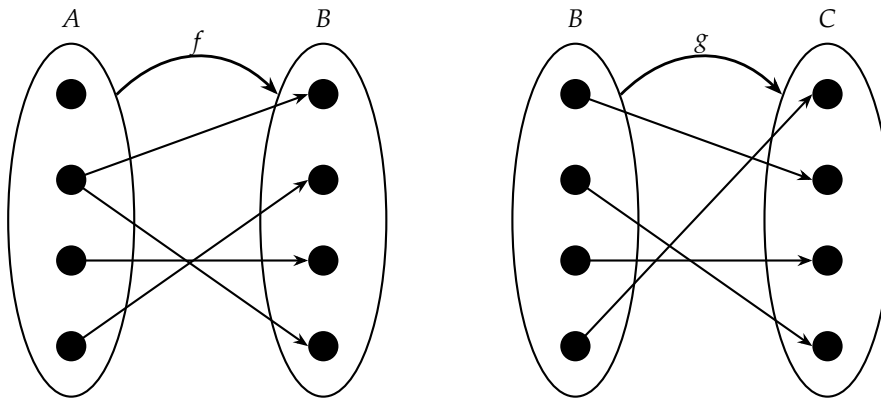
(A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh

(B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

(C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 21. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

(B) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

(C) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

(D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 22. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

(A) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

(B) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$

(C) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

(D) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$

Câu 23. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

(A) 44200

(B) 43750

(C) 42525

(D) 43800

Câu 24. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 3

(B) 2

(C) 1

(D) 4

Câu 25. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \emptyset$

(B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(C) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 26. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- ☐ A $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$
 ☐ B $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$
 ☐ C $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$
 ☐ D $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- ☐ A $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 2$)
 ☐ B $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$)
 ☐ C $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 1$)
 ☐ D $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 1$)

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (5)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (5), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (6)$$

Theo giả thiết quy nạp, (6) đúng, và do đó (5) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
☐ B Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
☐ D Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☐ A Ít nhất một con ngựa có màu trắng
☐ B Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
☐ C Con ngựa cuối cùng có màu trắng
☐ D Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về *Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”* (Well-ordering principle).

- ☐ A Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
☐ B Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

- Ⓒ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- Ⓓ Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- Ⓐ 8 Ⓑ 10 Ⓒ 7 Ⓓ 11

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- Ⓐ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$ Ⓑ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
- Ⓒ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$ Ⓓ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$

Câu 33. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- Ⓐ Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- Ⓑ Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- Ⓒ Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- Ⓓ Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- Ⓐ -6071 Ⓑ 6071 Ⓒ -6067 Ⓓ 6067

Câu 35. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- Ⓐ 0 Ⓑ 01 Ⓒ 0101 Ⓓ 1

Câu 36. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```

FIBMERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$ , với  $n = f_\ell \rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := f_{\ell-1}$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    FIBMERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    FIBMERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 

```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ A $O(f_\ell \log \ell)$
☐ B $O(\ell \log \ell)$
☐ C $O(\ell f_\ell)$
☐ D $O(\ell^2)$

Câu 37. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

- ☐ A $n!$
☐ B $n \log n + 3n^2$
☐ C $n \log n + 3 \log \log n$
☐ D 2^n

Câu 38. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```

MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 

```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ A $O(n \log n)$
☐ B $O(n)$
☐ C $O(\log n)$
☐ D $O(n^2)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

- ☐ A Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy
☐ B Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy
☐ C Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy
☐ D Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy

Câu 40. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm n số nguyên và một số nguyên x .

```

for  $i := 1$  to 10 do
  if  $a_i < x$  then
    return True
return False

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

- ☐ A $O(n^3)$
☐ B $O(n^2)$
☐ C $O(1)$
☐ D $O(n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 035

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. B	07. C	13. B	19. B	24. B	30. A	36. C
02. D	08. A	14. A	20. D	25. A	31. D	37. C
03. B	09. A	15. B	21. A	26. A	32. C	38. A
04. A	10. D	16. B	22. D	27. D	33. C	39. A
05. A	11. A	17. C	23. A	28. B	34. A	40. C
06. D	12. C	18. B		29. A	35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 036

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

☐ (A) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

☐ (B) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

☐ (C) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

☐ (D) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Câu 02. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ... ?`

☐ (A) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

☐ (B) $x \oplus y \oplus z$

☐ (C) $x \vee y \vee z$

☐ (D) $x \wedge y \wedge z$

Câu 03. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

☐ (A) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (B) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (C) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ (D) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 04. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

☐ (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

☐ (B) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

☐ (C) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

☐ (D) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 05. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$

$q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$

$r = \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- ☐ A $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$
☐ B $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
☐ C $(p \wedge q) \rightarrow q$
☐ D $(p \wedge q) \vee q$

Câu 06. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ B $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ C $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ D $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 07. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 08. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Alice nói thật và Peter nói dối
☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ C Peter nói thật và Alice nói dối
☐ D Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \wedge y$
☐ B $x \oplus y$
☐ C $x \vee y$
☐ D $x \leftrightarrow y$

Câu 10. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng
☐ B Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
☐ D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp

Câu 11. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ B $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
☐ C Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ D $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Câu 12. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- (A) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
 (B) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 (C) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
 (D) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 13. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- (A) Cả Alice và Peter đều nói thật
 (B) Cả Alice và Peter đều nói dối
 (C) Alice nói thật và Peter nói dối
 (D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 14. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
 (B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
 (C) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
 (D) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 15. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
 (B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
 (C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
 (D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 16. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 185
 (B) 195
 (C) 170
 (D) 165

Câu 17. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- (A) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$
 (B) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$
 (C) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
 (D) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$

Câu 18. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$
 (B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
 (C) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$
 (D) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

Câu 19. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- (A) 3
 (B) 1
 (C) 2
 (D) 4

Câu 20. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ (A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
- ☐ (B) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
- ☐ (C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
- ☐ (D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 21. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- ☒ (A) 4
- ☐ (B) 1
- ☐ (C) 2
- ☐ (D) 3

Câu 22. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) A là tập hữu hạn
- ☐ (B) Cả ba phát biểu khác đều sai
- ☐ (C) $A \subset A$
- ☐ (D) $B \subseteq A$

Câu 23. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 500
- ☐ (B) 1044
- ☐ (C) 1210
- ☐ (D) 484

Câu 24. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- ☐ (A) 28
- ☐ (B) 32
- ☐ (C) 31
- ☐ (D) 37

Câu 25. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 2
- ☐ (B) 4
- ☐ (C) 1
- ☐ (D) 3

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- ☐ (A) 10
- ☐ (B) 7
- ☐ (C) 8
- ☐ (D) 11

Câu 27. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- ☐ (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- ☐ (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- ☐ (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- ☐ (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ B Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☒ A Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- ☐ B Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- ☐ C Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- ☐ D Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- ☒ A 01
- ☐ B 0101
- ☐ C 0
- ☐ D 1

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} 5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (7)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 0. \quad (9)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì đẳng thức (7) ở bước quy nạp không chính xác
 (B) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
 (C) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 832 (B) 398 (C) 340 (D) 468

Câu 33. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (B) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (D) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (10)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (10), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (11)$$

Theo giả thiết quy nạp, (11) đúng, và do đó (10) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
 (B) Không có gì sai trong chứng minh này
 (C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
 (D) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

- (A) Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy
- (B) Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy
- (C) Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy
- (D) Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy

Câu 37. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(n^2)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(n^2 \log n)$ (D) $O(n)$

Câu 38. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- (B) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- (C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
- (D) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Câu 39. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
for j := 2 to m do
  b := b + 2

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(m)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m + n)$ (D) $O(n)$

Câu 40. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```

MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 

```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

☒ A $O(\log n)$

☐ B $O(n)$

☐ C $O(n^2)$

☐ D $O(n \log n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 036

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. D	07. D	12. A	18. B	24. C	30. A	36. C
02. C	08. A	13. B	19. A	25. A	31. D	37. B
03. A	09. D	14. D	20. D	26. D	32. A	38. C
04. A	10. D	15. C	21. B	27. B	33. B	39. C
05. A	11. D	16. A	22. B	28. B	34. A	40. D
06. A		17. D	23. C	29. A	35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 037

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{"Tàu đến muộn."}$
 $q = \text{"Giám đốc đến đúng giờ."}$
 $r = \text{"Tuần đến công ty trước giám đốc."}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

"Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc."

- ☐ A $(p \wedge q) \vee q$ ☐ B $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ C $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ ☐ D $(p \wedge q) \rightarrow q$

Câu 02. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu "Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ " bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ A Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
☐ B Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ C Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ D Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$

Câu 03. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng "với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương"?

- ☐ A $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0)$ ☐ B $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ C $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ ☐ D $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

Câu 04. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

"Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$."

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
☐ B Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
☐ D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

Câu 05. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng "Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân"?

(A) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

(B) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

(C) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

(D) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 06. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói thật

(B) Alice nói thật và Peter nói dối

(C) Cả Alice và Peter đều nói dối

(D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 07. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

(A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

(B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

(C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

(D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

Câu 08. Với các số thực x và y , số y được gọi là nghịch đảo cộng (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- (A)** $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- (B)** $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- (C)** $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- (D)** $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 09. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- (A)** $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
- (B)** $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
- (C)** $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
- (D)** $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

(A) $x \oplus y$

(B) $x \wedge y$

(C) $x \leftrightarrow y$

(D) $x \vee y$

Câu 11. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

(A) $x \vee y \vee z$

(B) $\neg(x \wedge y \wedge z)$

(C) $x \oplus y \oplus z$

(D) $x \wedge y \wedge z$

Câu 12. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

(A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

(B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

(C) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

(D) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 13. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

(A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$

(B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

(C) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

(D) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 14. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

(A) Cả Alice và Peter đều nói dối

(B) Cả Alice và Peter đều nói thật

(C) Peter nói thật và Alice nói dối

(D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 15. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

(B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

(C) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

(D) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

Câu 16. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

(A) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

(B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

(C) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

(D) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

(A) 1

(B) 3

(C) 4

(D) 2

Câu 18. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

(A) $B \subseteq A$

(B) Cả ba phát biểu khác đều sai

(C) A là tập hữu hạn

(D) $A \subset A$

Câu 19. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 4

Câu 20. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- (A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
(B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
(C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
(D) R là quan hệ tương đương

Câu 21. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- (A) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$ (B) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$
(C) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$ (D) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

Câu 22. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- (A) 484 (B) 1210 (C) 1044 (D) 500

Câu 23. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(B) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
(C) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(D) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh

Câu 24. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- (A) 28 (B) 32 (C) 31 (D) 37

Câu 25. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- (A) 44200 (B) 42525 (C) 43800 (D) 43750

Câu 26. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (B) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (D) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ " bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (1)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (1), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (2)$$

Theo giả thiết quy nạp, (2) đúng, và do đó (1) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
 Ⓑ Không có gì sai trong chứng minh này
 Ⓒ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- Ⓐ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$ Ⓑ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$ Ⓒ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$ Ⓓ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- Ⓐ 7 Ⓑ 11 Ⓒ 10 Ⓓ 8

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- Ⓐ 340 Ⓑ 398 Ⓒ 468 Ⓓ 832

Câu 31. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☐ A Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- ☐ B Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- ☐ C Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- ☐ D Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- ☐ A Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
- ☐ B Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- ☐ C Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- ☐ D Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 33. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- ☐ A Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- ☐ B Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- ☐ C Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k + 1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- ☐ D Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- ☐ A Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$
- ☐ B Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
- ☐ C Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
- ☐ D Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- ☐ A Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ B Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ C Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- ☐ D Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 36. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- ☐ A $\log_a n$
- ☐ B b^k
- ☐ C $\log_b n$
- ☐ D a^k

Câu 37. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- ☐ A $g(x)$ là $O(f(x))$
☐ B $f(x)$ là $O(g(x))$
☐ C $f(x)$ là $\Theta(g(x))$
☐ D $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 38. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- ☐ A Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ là $O(f(x)/2)$
☐ B Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ không là $O(f(x)/2)$
☐ C Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ không là $O(g(x)/2)$
☐ D Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ là $O(g(x)/2)$

Câu 39. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm n số nguyên và một số nguyên x .

```

for i := 1 to 10 do
  if  $a_i < x$  then
    return True
return False

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

- ☐ A $O(n^2)$
☐ B $O(n)$
☐ C $O(1)$
☐ D $O(n^3)$

Câu 40. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- ☐ A $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
☐ B $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
☐ C $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
☐ D $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 037

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☐ C	07. ☐ B	13. ☐ B	19. ☐ C	25. ☐ A	31. ☐ C	37. ☐ A
02. ☐ A	08. ☐ A	14. ☐ D	20. ☐ A	26. ☐ A	32. ☐ C	38. ☐ D
03. ☐ A	09. ☐ C	15. ☐ D	21. ☐ C	27. ☐ D	33. ☐ C	39. ☐ C
04. ☐ A	10. ☐ C	16. ☐ B	22. ☐ B	28. ☐ B	34. ☐ A	40. ☐ C
05. ☐ C	11. ☐ A	17. ☐ B	23. ☐ D	29. ☐ B	35. ☐ B	
06. ☐ C	12. ☐ D	18. ☐ B	24. ☐ C	30. ☐ D	36. ☐ C	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 038

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$

☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

Câu 02. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned} p &= \text{“Tàu đến muộn.”} \\ q &= \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”} \\ r &= \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”} \end{aligned}$$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

☐ A $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

☐ B $(p \wedge q) \vee q$

☐ C $(p \wedge q) \rightarrow q$

☐ D $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

☐ A $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

☐ C $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

☐ D $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

☐ A $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ B $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ C $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ D $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 06. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \vee y$
☐ B $x \oplus y$
☐ C $x \wedge y$
☐ D $x \leftrightarrow y$

Câu 07. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ A Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
☐ B Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
☐ C Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ D Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 08. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
☐ C Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

Câu 09. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ D $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$

Câu 10. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ B $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ D $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 11. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☒ (A) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
☐ (B) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☒ (C) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ (D) $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 12. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ (A) Peter nói thật và Alice nói dối
☐ (B) Cả Alice và Peter đều nói thật
☒ (C) Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ (D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 13. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ (A) Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ (B) Cả Alice và Peter đều nói dối
☒ (C) Alice nói thật và Peter nói dối
☐ (D) Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 14. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☒ (A) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ (B) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
☒ (C) $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
☐ (D) $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 15. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☒ (A) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
☐ (B) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
☒ (C) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
☐ (D) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$

Câu 16. Biểu thức nào là sai?

- ☒ (A) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
☐ (B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
☒ (C) $\emptyset \in \emptyset$
☐ (D) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 17. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- ☒ (A) 31
☐ (B) 28
☒ (C) 37
☐ (D) 32

Câu 18. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☒ (A) $B \subseteq A$
☐ (B) Cả ba phát biểu khác đều sai
☒ (C) A là tập hữu hạn
☐ (D) $A \subset A$

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- ☒ (A) 43750
☐ (B) 43800
☒ (C) 44200
☐ (D) 42525

Câu 20. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

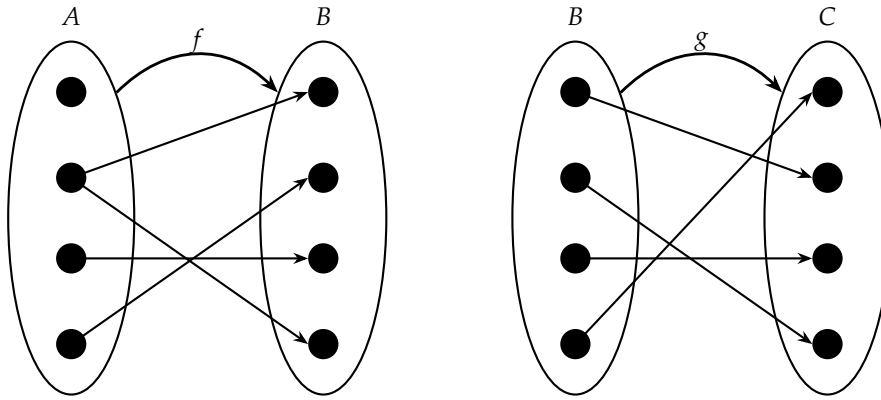
- (A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
 (B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
 (C) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
 (D) R là quan hệ tương đương

Câu 21. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- (A) 103 (B) 100 (C) 101 (D) 102

Câu 22. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- (A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh (B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
 (C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh (D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 23. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1

Câu 24. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ (B) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$
 (C) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$ (D) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

Câu 25. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- (A) $A = B = \mathbb{Z}$ (B) $A = B = \mathbb{N}$ (C) $A = B = \mathbb{R}$ (D) $A = B = \mathbb{Q}$

Câu 26. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (B) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (D) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$ (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$ (D) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 398 (B) 340 (C) 468 (D) 832

Câu 29. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
(B) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Con ngựa cuối cùng có màu trắng

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về *Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt"* (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(B) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(C) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
(D) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
(B) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
(C) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
(D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- Ⓐ Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
 Ⓑ Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
 Ⓒ Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
 Ⓓ Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (8)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (8), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (9)$$

Theo giả thiết quy nạp, (9) đúng, và do đó (8) cũng đúng. Vậy $P(k + 1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k + 1)$ và đi chứng minh $P(k)$
 Ⓑ Không có gì sai trong chứng minh này
 Ⓒ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (10)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (11)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ B Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ C Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ D Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác

Câu 36. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```
FIBMERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
     $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$ , với  $n = f_\ell \rangle\rangle$ 
    if  $n > 1$ 
         $m := f_{\ell-1}$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
        FIBMERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
        FIBMERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
        MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
```

```
MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
     $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n] \rangle\rangle$ 
     $i := 1; j := m + 1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
        if  $j > n$  then
             $B[k] := A[i]; i := i + 1$ 
        else if  $i > m$  then
             $B[k] := A[j]; j := j + 1$ 
        else if  $A[i] < A[j]$  then
             $B[k] := A[i]; i := i + 1$ 
        else
             $B[k] := A[j]; j := j + 1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
         $A[k] := B[k]$ 
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☒ A $O(f_\ell \log \ell)$
- ☐ B $O(\ell \log \ell)$
- ☐ C $O(\ell f_\ell)$
- ☐ D $O(\ell^2)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$ và $b > 1$, $c, d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- ☒ A $\log_b n$
- ☐ B a^k
- ☐ C $\log_a n$
- ☐ D b^k

Câu 38. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- ☒ A $f(x)$ là $O(g(x))$
- ☐ B $g(x)$ là $O(f(x))$
- ☐ C $f(x)$ là $\Theta(g(x))$
- ☐ D $f(x)$ là $o(g(x))$

Câu 39. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ A $O(n^2)$ ☐ B $O(n \log n)$ ☐ C $O(n)$ ☒ D $O(n^2 \log n)$

Câu 40. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

```
COMPUTESUM( $n$ ):
  if  $n = 1$  then
    return 3
   $y :=$  COMPUTESUM( $n - 1$ )
  return  $\diamond$ 
```

Cần thay $\diamond$ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

- ☐ A $y + (n+2)n^2$ ☐ B $(y+2)y^2$ ☐ C y ☒ D $y + n$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 038

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. C	07. A	12. D	18. B	24. D	30. A	36. C
02. D	08. D	13. B	19. C	25. C	31. C	37. A
03. B	09. A	14. A	20. A	26. A	32. C	38. B
04. B	10. D	15. C	21. D	27. D	33. A	39. B
05. D	11. A	16. C	22. B	28. D	34. A	40. A
06. D		17. A	23. B	29. D	35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 039

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

- Lưu ý:** - Đề gồm 40 câu/9 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Alice nói thật và Peter nói dối
☒ B Peter nói thật và Alice nói dối
☐ C Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ D Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 02. Cho p , q , và r là các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned}p &= \text{“Tàu đến muộn.”} \\q &= \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”} \\r &= \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”}\end{aligned}$$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- ☒ A $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$
☐ B $(p \wedge q) \vee q$
☐ C $(p \wedge q) \rightarrow q$
☐ D $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Câu 03. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
☐ B $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ C Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ D $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
- (B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
- (C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
- (D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
- (B) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
- (C) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
- (D) Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

Câu 06. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- | | |
|---|---|
| <p>(A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$</p> | <p>(B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$</p> |
| <p>(C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$</p> | <p>(D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$</p> |

Câu 07. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- | | | | |
|---------------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------|
| (A) $\neg(x \wedge y \wedge z)$ | (B) $x \wedge y \wedge z$ | (C) $x \oplus y \oplus z$ | (D) $x \vee y \vee z$ |
|---------------------------------|---------------------------|---------------------------|-----------------------|

Câu 08. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- (A) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
- (B) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
- (C) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
- (D) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$

Câu 09. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☐ A $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ C $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$

- ☐ B $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ D $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$

Câu 10. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

- ☐ B $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ D $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 11. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ ☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ C $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ ☐ D $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

Câu 12. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 13. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$ ☐ B $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ ☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 14. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- ☐ A $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$ ☐ B $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
☐ C $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$ ☐ D $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$

Câu 15. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- ☐ A $x \leftrightarrow y$ ☐ B $x \oplus y$ ☐ C $x \wedge y$ ☐ D $x \vee y$

Câu 16. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- ☐ A 3 ☐ B 4 ☐ C 2 ☐ D 1

Câu 17. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- ☐ A 43800 ☐ B 43750 ☐ C 42525 ☐ D 44200

Câu 18. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- (A) 32 (B) 37 (C) 31 (D) 28

Câu 19. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- (A) 102 (B) 100 (C) 101 (D) 103

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- (A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Câu 21. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
(B) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
(C) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
(D) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 22. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- (A) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$ (B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
(C) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ (D) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

Câu 23. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 170 (B) 185 (C) 195 (D) 165

Câu 24. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 4

Câu 25. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- (A) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$ (B) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
(C) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$ (D) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 10 (B) 7 (C) 8 (D) 11

Câu 27. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- Ⓐ Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
- Ⓑ Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
- Ⓒ Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- Ⓓ Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- Ⓐ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$
- Ⓑ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$
- Ⓒ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
- Ⓓ Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 29. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- Ⓐ Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- Ⓑ Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- Ⓒ Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- Ⓓ Con ngựa đầu tiên có màu trắng

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- Ⓐ Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- Ⓑ Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- Ⓒ Không có gì sai trong chứng minh này
- Ⓓ Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- Ⓐ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$ Ⓑ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$ Ⓒ $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$ Ⓓ $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$

Câu 32. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- Ⓐ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ Ⓑ $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ Ⓒ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ Ⓓ $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (8)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (8), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (9)$$

Theo giả thiết quy nạp, (9) đúng, và do đó (8) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
 Ⓑ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
 Ⓒ Không có gì sai trong chứng minh này
 Ⓓ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- Ⓐ 340 Ⓑ 468 Ⓒ 832 Ⓓ 398

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (10)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (11)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☒ A Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ B Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ C Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ D Chứng minh này là sai vì đẳng thức (10) không chính xác

Câu 36. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```

MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
     $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]\rangle\rangle$ 
    if  $n > 1$ 
         $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
        MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
        MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
        MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    
```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
     $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]\rangle\rangle$ 
     $i := 1; j := m+1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
        if  $j > n$  then
             $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
        else if  $i > m$  then
             $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
        else if  $A[i] < A[j]$  then
             $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
        else
             $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
         $A[k] := B[k]$ 
    
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☒ A $O(\log n)$
- ☐ B $O(n^2)$
- ☐ C $O(n)$
- ☐ D $O(n \log n)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- ☒ A $\log_b n$
- ☐ B a^k
- ☐ C $\log_a n$
- ☐ D b^k

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo Định lý thợ (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- ☐ A $f(n) = O(n)$
- ☐ B Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
- ☐ C $f(n) = O(n \log n)$
- ☐ D $f(n) = O(n^{2.32})$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

- Ⓐ Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy
- Ⓑ Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy
- Ⓒ Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy
- Ⓓ Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy

Câu 40. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- Ⓐ $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
- Ⓑ $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- Ⓒ $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- Ⓓ $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 039

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. C	07. D	13. C	18. C	24. B	30. A	36. D
02. D	08. C	14. A	19. A	25. A	31. C	37. A
03. B	09. A	15. A	20. C	26. D	32. A	38. D
04. B	10. D	16. D	21. B	27. A	33. D	39. A
05. C	11. A	17. D	22. B	28. B	34. C	40. A
06. C	12. B		23. B	29. A	35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 040

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☒ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ ☐ B $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
☐ C $\exists x P(x, \text{Tuấn})$ ☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 02. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Peter nói thật và Alice nói dối ☐ B Alice nói thật và Peter nói dối
☐ C Cả Alice và Peter đều nói thật ☐ D Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 03. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☒ A $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Cả Alice và Peter đều nói thật ☐ B Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ C Peter nói thật và Alice nói dối ☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 05. Cho p , q , và r là các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned} p &= \text{“Tàu đến muộn.”} \\ q &= \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”} \\ r &= \text{“Tuấn đến công ty trước giám đốc.”} \end{aligned}$$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

- Ⓐ $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ Ⓑ $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ Ⓒ $(p \wedge q) \rightarrow q$ Ⓓ $(p \wedge q) \vee q$

Câu 06. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
 Ⓑ Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
 Ⓒ $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
 Ⓓ $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Câu 07. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- Ⓐ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 Ⓑ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
 Ⓒ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 Ⓓ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

Câu 08. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- Ⓐ $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ Ⓑ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
 Ⓒ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$ Ⓓ $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$

Câu 09. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- Ⓐ Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
 Ⓑ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 Ⓒ Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
 Ⓓ Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Câu 10. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- Ⓐ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$ Ⓑ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
 Ⓒ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$ Ⓓ $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

Câu 11. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- Ⓐ $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$ Ⓑ $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
 Ⓒ $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$ Ⓓ $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 12. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
- ☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
- ☐ C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
- ☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 13. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☐ A $x \vee y \vee z$
- ☐ B $x \wedge y \wedge z$
- ☐ C $x \oplus y \oplus z$
- ☐ D $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 14. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☐ A $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ B $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ C $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ D $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 15. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
- ☐ B $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
- ☐ C $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
- ☐ D $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 16. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 3
- ☐ B 4
- ☐ C 2
- ☐ D 1

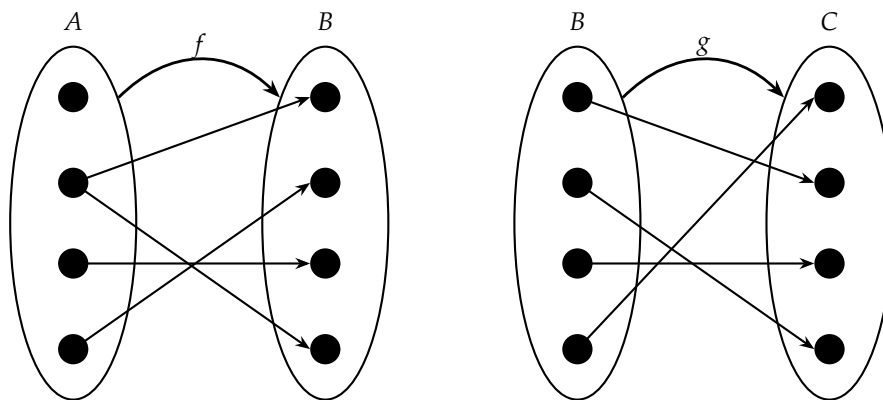
Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- ☐ A $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
- ☐ B $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
- ☐ C $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
- ☐ D $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- ☐ A $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$
- ☐ B $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
- ☐ C $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$
- ☐ D $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- ☐ (A) 43750 ☐ (B) 43800 ☐ (C) 44200 ☐ (D) 42525

Câu 20. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) Cả ba phát biểu khác đều sai ☐ (B) $B \subseteq A$
☐ (C) $A \subset A$ ☐ (D) A là tập hữu hạn

Câu 21. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 195 ☐ (B) 165 ☐ (C) 170 ☐ (D) 185

Câu 22. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
☐ (B) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
☐ (C) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
☐ (D) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh

Câu 23. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- ☐ (A) 2 ☐ (B) 3 ☐ (C) 4 ☐ (D) 1

Câu 24. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- ☐ (A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
☐ (B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
☐ (C) R là quan hệ tương đương
☐ (D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

Câu 25. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ ☐ (B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
☐ (C) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$ ☐ (D) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 27. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 0101 (B) 0 (C) 1 (D) 01

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- (A) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$ (B) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$
- (C) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$ (D) Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 1$) (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 2$) (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 1$) (D) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$)

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 7 (B) 11 (C) 8 (D) 10

Câu 31. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
- (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
- (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 32. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (B) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (D) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 33. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
(B) Con ngựa cuối cùng có màu trắng
(C) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
(D) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 340 (B) 468 (C) 832 (D) 398

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
(B) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
(C) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
(D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 2T(n/3) + O(1)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O -lớn.

- (A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 37. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo *Định lý thợ* (Master Theorem) thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- (A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
(B) $f(n) = O(n \log n)$
(C) $f(n) = O(-10n/11)$
(D) $f(n) = O(n)$

Câu 38. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán MERGESORT là?

```

MERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := \lfloor n/2 \rfloor$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 

```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i+1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j+1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☒ (A) $O(n \log n)$
☐ (B) $O(n)$
☐ (C) $O(\log n)$
☐ (D) $O(n^2)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- ☒ (A) $\log_b n$
☐ (B) a^k
☐ (C) b^k
☐ (D) $\log_a n$

Câu 40. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

- ☒ (A) $n \log n + 3 \log \log n$
☐ (B) $n!$
☐ (C) 2^n
☐ (D) $n \log n + 3n^2$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 040

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. A	07. D	13. A	19. C	24. D	30. B	36. A
02. B	08. D	14. A	20. A	25. B	31. A	37. B
03. C	09. D	15. D	21. D	26. B	32. A	38. A
04. B	10. B	16. C	22. A	27. D	33. D	39. A
05. A	11. D	17. C	23. D	28. B	34. C	40. A
06. A	12. C	18. A		29. A	35. C	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 041

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ A Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ B Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
☐ C Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
☐ D Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ D $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

Câu 03. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương
☐ C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
☐ D Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

Câu 04. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 05. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- Ⓐ $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0)$ Ⓑ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
 Ⓒ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$ Ⓓ $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$

Câu 06. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- Ⓐ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
 Ⓑ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 Ⓒ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
 Ⓓ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 07. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$$\begin{aligned} p &= \text{“Tàu đến muộn.”} \\ q &= \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”} \\ r &= \text{“Tuấn đến công ty trước giám đốc.”} \end{aligned}$$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

- Ⓐ $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ Ⓑ $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ Ⓒ $(p \wedge q) \vee q$ Ⓓ $(p \wedge q) \rightarrow q$

Câu 08. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- Ⓐ Alice nói thật và Peter nói dối Ⓑ Cả Alice và Peter đều nói thật
 Ⓒ Peter nói thật và Alice nói dối Ⓓ Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 09. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- Ⓐ $\exists x P(x, \text{Tuấn})$ Ⓑ $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
 Ⓒ $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$ Ⓓ $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 10. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- Ⓐ Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
 Ⓑ $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
 Ⓒ $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
 Ⓓ $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Câu 11. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- Ⓐ $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$ Ⓑ $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
 Ⓒ $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$ Ⓓ $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 12. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☒ A $\neg(x \wedge y \wedge z)$
☐ B $x \vee y \vee z$
☐ C $x \wedge y \wedge z$
☐ D $x \oplus y \oplus z$

Câu 13. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Cả Alice và Peter đều nói thật
 ☐ B Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ C Alice nói thật và Peter nói dối
 ☐ D Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 14. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☒ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$
☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$
☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

Câu 15. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☒ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ B $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ C $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
☐ D $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 16. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

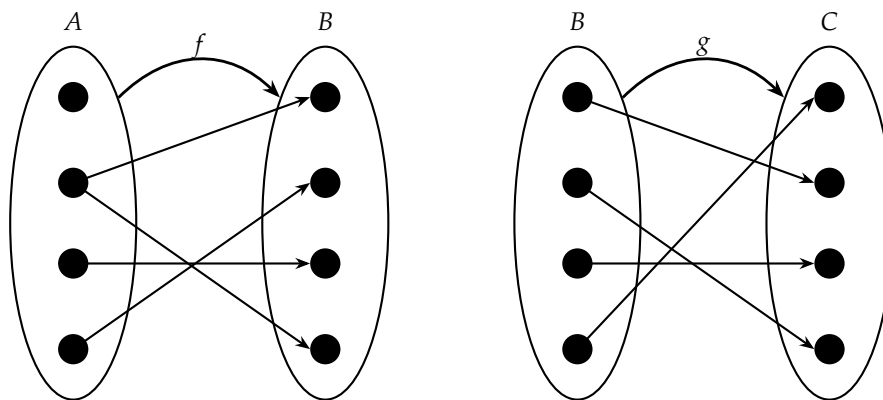
- ☒ A $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$
☐ B $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
☐ C $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$
☐ D $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

Câu 17. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- ☒ A $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
 ☐ B $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
☐ C $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
 ☐ D $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 18. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?



Hình 1: Các quan hệ f và g .

- ☐ A f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
- ☐ B f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
- ☐ C f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
- ☐ D f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- ☐ A 43750
- ☐ B 43800
- ☐ C 44200
- ☐ D 42525

Câu 20. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- ☐ A 4
- ☐ B 2
- ☐ C 3
- ☐ D 1

Câu 21. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 195
- ☐ B 165
- ☐ C 170
- ☐ D 185

Câu 22. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- ☐ A 1
- ☐ B 4
- ☐ C 3
- ☐ D 2

Câu 23. Biểu thức nào là sai?

- ☐ A $\emptyset \in \emptyset$
- ☐ B $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
- ☐ C $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- ☐ D $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 24. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☐ A $A \subset A$
- ☐ B $B \subseteq A$
- ☐ C A là tập hữu hạn
- ☐ D Cả ba phát biểu khác đều sai

Câu 25. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- ☐ A R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
- ☐ B R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu
- ☐ C R là quan hệ tương đương
- ☐ D R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
 (B) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 (C) Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
 (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$ (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$ (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$ (D) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ B Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này là sai vì đẳng thức (8) không chính xác

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (10)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (10), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (11)$$

Theo giả thiết quy nạp, (11) đúng, và do đó (10) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
- ☐ B Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
- ☐ C Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
- ☐ D Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- ☐ A Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- ☐ B Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- ☐ C Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- ☐ D Con ngựa cuối cùng có màu trắng

Câu 31. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- ☐ A 0
- ☐ B 1
- ☐ C 01
- ☐ D 0101

Câu 32. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh “ $\forall n \geq 4 P(n)$ ”. Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

“Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng.”

- (A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (B) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$ (C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$ (D) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 33. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) 6067 (B) -6067 (C) 6071 (D) -6071

Câu 34. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 340 (B) 468 (C) 832 (D) 398

Câu 35. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu “ $n+1 = n+2$ ”. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k+1 = k+2$. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k+1 = k+2$, ta có $k+2 = k+3$. Do đó, $P(k+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Không có gì sai trong chứng minh này
 (B) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
 (C) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
 (D) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 36. Giả sử thời gian chạy của một thuật toán nào đó được cho bởi hệ thức truy hồi $T(n) = 2T(n/3) + O(1)$. Chọn đánh giá tốt nhất về độ tăng của $T(n)$ theo ký hiệu O -lớn.

- (A) $O(n^{\log_3 2})$ (B) $O(1)$ (C) $O(n)$ (D) $O(\log n)$

Câu 37. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
    j := 2
    while j ≤ n do
        j := j · j
        a := a + j
    
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(n^2)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(n^2 \log n)$ (D) $O(n)$

Câu 38. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
 (B) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
 (C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$
 (D) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$

Câu 39. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
for j := 2 to m do
  b := b + 2

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(m)$ (B) $O(m \cdot n)$ (C) $O(m + n)$ (D) $O(n)$

Câu 40. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0, f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```

FIBMERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
   $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$ , với  $n = f_\ell \rangle\rangle$ 
  if  $n > 1$ 
     $m := f_{\ell-1}$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    FIBMERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    FIBMERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
    MERGE( $A[1 \dots n], m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 

```

```

MERGE( $A[1 \dots n], m$ ):
   $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
   $i := 1; j := m + 1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
    if  $j > n$  then
       $B[k] := A[i]; i := i + 1$ 
    else if  $i > m$  then
       $B[k] := A[j]; j := j + 1$ 
    else if  $A[i] < A[j]$  then
       $B[k] := A[i]; i := i + 1$ 
    else
       $B[k] := A[j]; j := j + 1$ 
  for  $k := 1$  to  $n$  do
     $A[k] := B[k]$ 

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(f_\ell \log \ell)$ (B) $O(\ell f_\ell)$ (C) $O(\ell \log \ell)$ (D) $O(\ell^2)$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 041

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. B	06. A	12. B	18. C	24. D	30. A	36. A
02. C	07. B	13. B	19. C	25. B	31. C	37. B
03. A	08. A	14. A	20. D	26. D	32. A	38. C
04. D	09. B	15. D	21. D	27. D	33. D	39. C
05. A	10. B	16. C	22. C	28. B	34. C	40. B
	11. A	17. C	23. A	29. A	35. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 042

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ (A) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ ☐ (B) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \neq (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ (C) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$ ☐ (D) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
☐ (B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ (C) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
☐ (D) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

Câu 03. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☐ (A) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$ ☐ (B) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$
☐ (C) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$ ☐ (D) $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 04. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- ☐ (A) $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ (B) $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$
☐ (C) $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$ ☐ (D) $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 05. Với các số thực x và y , số y được gọi là nghịch đảo cộng (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ B $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ C $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
☐ D $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 06. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$ ☐ B $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
☐ C $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$ ☐ D $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 07. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ ☐ B $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
☐ C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ ☐ D $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 08. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$
 $q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$
 $r = \text{“Tuấn đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuấn đến công ty trước giám đốc.”

- ☐ A $(p \wedge q) \vee q$ ☐ B $(p \wedge q) \rightarrow q$ ☐ C $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ D $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

Câu 09. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☐ A $x \wedge y \wedge z$ ☐ B $x \oplus y \oplus z$ ☐ C $x \vee y \vee z$ ☐ D $\neg(x \wedge y \wedge z)$

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ A Alice nói thật và Peter nói dối ☐ B Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ C Peter nói thật và Alice nói dối ☐ D Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y)$
☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}))$

Câu 12. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
☐ B $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
☐ C $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
☐ D Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng

Câu 13. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☐ A Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ B Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
☐ C Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
☐ D Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$

Câu 14. Gọi $P(x, y)$ là vị từ “ x chơi pickleball với y ”, trong đó các biến x và y xác định trên tập hợp tất cả mọi người. Giả sử không ai chơi pickleball với chính mình. Mệnh đề nào sau đây tương đương với “Có ít nhất ba người chơi pickleball”? Giả sử các biến trong mỗi mệnh đề đều xác định trên tập hợp tất cả mọi người.

- ☐ A $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$
☐ B $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y = z))$
☐ C $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (x = z))$
☐ D $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \wedge P(x, z) \wedge (y \neq z))$

Câu 15. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)
Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.		

- ☐ A Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
☐ C Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 16. Biểu thức nào là sai?

- ☐ A $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
☐ B $\emptyset \in \{\emptyset\}$
☐ C $\emptyset \in \emptyset$
☐ D $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 17. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- ☐ A 1
☐ B 3
☐ C 4
☐ D 2

Câu 18. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 170
☐ B 195
☐ C 165
☐ D 185

Câu 19. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ (A) f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh
- ☐ (B) f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
- ☐ (C) f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
- ☐ (D) f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh

Câu 20. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- ☒ (A) 37
- ☐ (B) 32
- ☐ (C) 28
- ☐ (D) 31

Câu 21. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- ☒ (A) $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
- ☐ (B) $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$
- ☐ (C) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$
- ☐ (D) $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$

Câu 22. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, *tập lũy thừa* (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☒ (A) $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$
- ☐ (B) $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
- ☐ (C) $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
- ☐ (D) $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$

Câu 23. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- ☒ (A) 101
- ☐ (B) 102
- ☐ (C) 103
- ☐ (D) 100

Câu 24. Cho quan hệ R trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$ định nghĩa như sau: Với các số nguyên $a, b \in \mathbb{Z}$, aRb khi và chỉ khi $|a - b| \leq 1$. Chọn phát biểu đúng về quan hệ R .

- ☒ (A) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất đối xứng
- ☐ (B) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất phản xạ
- ☐ (C) R là quan hệ tương đương
- ☐ (D) R không là quan hệ tương đương vì nó không thỏa mãn tính chất bắc cầu

Câu 25. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☒ (A) $B \subseteq A$
- ☐ (B) Cả ba phát biểu khác đều sai
- ☐ (C) A là tập hữu hạn
- ☐ (D) $A \subset A$

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
- (B) Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (C) Không có gì sai trong chứng minh này
- (D) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 27. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 0101
- (B) 0
- (C) 1
- (D) 01

Câu 28. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 398
- (B) 340
- (C) 468
- (D) 832

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 1)$
- (B) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$
- (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} (n \geq 1)$
- (D) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} (n \geq 2)$

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- (A) -6071
- (B) 6067
- (C) 6071
- (D) -6067

Câu 31. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt” (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (B) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (C) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (D) Theo Tiên đề “Tính chất sắp thứ tự tốt”, tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 32. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- (A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
- (C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng
- (D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu “ $n + 1 = n + 2$ ”. Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- (B) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai
- (C) Không có gì sai trong chứng minh này
- (D) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (7)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (8)$$

$$= 0. \quad (9)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- (B) Chứng minh này sai vì đẳng thức (7) ở bước quy nạp không chính xác
- (C) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- (A) 8 (B) 7 (C) 11 (D) 10

Câu 36. Hàm COMPUTESUM sau có đầu vào là một số nguyên dương n và sẽ trả lại giá trị của $\sum_{i=1}^n (i+2)i^2$.

COMPUTESUM(n):
 if $n = 1$ then
 return 3
 $y := \text{COMPUTESUM}(n-1)$
 return $\diamond$

Cần thay $\diamond$ bằng biểu thức nào để COMPUTESUM(n) trả lại kết quả mong muốn?

- (A) $y + (n+2)n^2$ (B) y (C) $(y+2)y^2$ (D) $y + n$

Câu 37. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
 (B) $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
 (C) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
 (D) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- (A) a^k (B) $\log_b n$ (C) $\log_a n$ (D) b^k

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Ở đây ý nghĩa của số a trong cây đệ quy (recursion tree) tương ứng của hệ thức là gì?

- (A) Số nút con của mỗi nút trong của cây đệ quy
 (B) Lượng công việc thực hiện ở mỗi nút của cây đệ quy
 (C) Lượng công việc thực hiện ở mỗi mức của cây đệ quy
 (D) Tổng số nút ở từng mức của cây đệ quy

Câu 40. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ (B) $g(x)$ là $O(f(x))$ (C) $f(x)$ là $o(g(x))$ (D) $f(x)$ là $O(g(x))$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 042

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

- | | | | | | | |
|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 01. D | 07. C | 13. D | 19. B | 25. B | 31. C | 37. D |
| 02. C | 08. D | 14. A | 20. D | 26. B | 32. D | 38. B |
| 03. A | 09. C | 15. C | 21. C | 27. D | 33. D | 39. A |
| 04. B | 10. B | 16. C | 22. B | 28. D | 34. D | 40. B |
| 05. D | 11. A | 17. B | 23. B | 29. A | 35. C | |
| 06. A | 12. C | 18. D | 24. D | 30. A | 36. A | |

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 043

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.
- Không sử dụng tài liệu.
- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.
- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề " $1 = 2$ ". Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------|-----|
| $1 = 2$ | (Điều phải chứng minh) | (1) |
| $\Leftrightarrow 2 = 1$ | (Đối xứng) | (2) |
| $\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$ | (Cộng theo vế (1) và (2)) | (3) |
| $\Leftrightarrow 3 = 3.$ | | (4) |

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
(B) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
(C) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
(D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 02. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng "với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương"?

- (A) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$
(B) $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$
(C) $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$
(D) $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$

Câu 03. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng "mọi số thực có nghịch đảo cộng". Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- (A) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(B) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(C) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
(D) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề "Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ". Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề "Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ "?

(**Chú ý:** Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- A** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$ **B** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
- C** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$ **D** $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$

Câu 05. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

- A** $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$
B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$
D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

Câu 06. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- A** Cả Alice và Peter đều nói thật **B** Alice nói thật và Peter nói dối
C Cả Alice và Peter đều nói dối **D** Peter nói thật và Alice nói dối

Câu 07. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A** $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
B $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
C Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
D $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Câu 08. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- A** $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ **B** $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
C $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$ **D** $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

Câu 09. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A** $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
C $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
D $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Câu 10. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- A** Alice nói thật và Peter nói dối **B** Cả Alice và Peter đều nói dối
C Peter nói thật và Alice nói dối **D** Cả Alice và Peter đều nói thật

Câu 11. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ A $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ ☐ B $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$
☐ C $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$ ☐ D $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$

Câu 12. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
☐ B Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
☐ C Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
☐ D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

Câu 13. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ A $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$ ☐ B $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
☐ C $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$ ☐ D $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$

Câu 14. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{“Tàu đến muộn.”}$
 $q = \text{“Giám đốc đến đúng giờ.”}$
 $r = \text{“Tuần đến công ty trước giám đốc.”}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- ☐ A $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ ☐ B $(p \wedge q) \rightarrow q$ ☐ C $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ ☐ D $(p \wedge q) \vee q$

Câu 15. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x, y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☐ A $\neg(x \wedge y \wedge z)$ ☐ B $x \oplus y \oplus z$ ☐ C $x \wedge y \wedge z$ ☐ D $x \vee y \vee z$

Câu 16. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- ☐ A $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$ ☐ B $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
☐ C $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$ ☐ D $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$

Câu 17. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- ☐ A 484 ☐ B 1044 ☐ C 1210 ☐ D 500

Câu 18. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 170 ☐ B 195 ☐ C 165 ☐ D 185

Câu 19. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

(A) 43750

(B) 43800

(C) 44200

(D) 42525

Câu 20. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

(A) $A = B = \mathbb{N}$

(B) $A = B = \mathbb{Z}$

(C) $A = B = \mathbb{Q}$

(D) $A = B = \mathbb{R}$

Câu 21. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

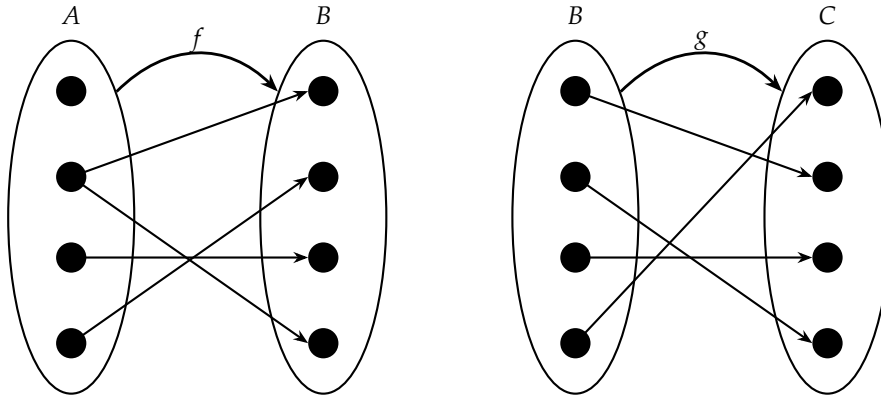
(A) 37

(B) 31

(C) 32

(D) 28

Câu 22. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

(A) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh

(B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh

(C) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

(D) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

Câu 23. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 1

Câu 24. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

(A) 3

(B) 2

(C) 1

(D) 4

Câu 25. Biểu thức nào là sai?

(A) $\emptyset \in \emptyset$

(B) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(C) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(D) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ ” dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu “ $5n - 5 = 0$ ”. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp mạnh.

• **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.

• **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
 (B) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 (C) Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
 (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 398 (B) 468 (C) 832 (D) 340

Câu 28. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

- (A) 0101 (B) 01 (C) 0 (D) 1

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (8)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (8), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (9)$$

Theo giả thiết quy nạp, (9) đúng, và do đó (8) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- (A) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
 (B) Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
 (C) Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
 (D) Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 30. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

(A) 7

(B) 11

(C) 8

(D) 10

Câu 31. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

(A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng

(B) Con ngựa cuối cùng có màu trắng

(C) Ít nhất một con ngựa có màu trắng

(D) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 32. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

(A) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$

(B) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

(C) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$

(D) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n+1 = n+2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k+1 = k+2$. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k+1 = k+2$, ta có $k+2 = k+3$. Do đó, $P(k+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

(A) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp

(B) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

(C) Không có gì sai trong chứng minh này

(D) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở

Câu 34. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

(A) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

(B) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$

(C) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

(D) Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$

Câu 35. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

(A) 6071

(B) -6071

(C) 6067

(D) -6067

Câu 36. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
 (B) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
 (C) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
 (D) $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Câu 37. Giả sử n là một số nguyên dương. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```

a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  j := 2
  while j ≤ n do
    j := j · j
    a := a + j

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- (A) $O(n^2)$ (B) $O(n \log n)$ (C) $O(n^2 \log n)$ (D) $O(n)$

Câu 38. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm n số nguyên và một số nguyên x .

```

for i := 1 to 10 do
  if  $a_i < x$  then
    return True
return False

```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

- (A) $O(n)$ (B) $O(n^2)$ (C) $O(n^3)$ (D) $O(1)$

Câu 39. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 5f(n/2) + n^2$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- (A) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
 (B) $f(n) = O(n)$
 (C) $f(n) = O(n^{2.32})$
 (D) $f(n) = O(n \log n)$

Câu 40. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = af(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, $a, b \in \mathbb{Z}, a \geq 1$ và $b > 1, c, d \in \mathbb{R}, c > 0$ và $d \geq 0$. Giả sử $f(1) = 1$. Giả sử các mức trong cây đệ quy được đánh số lần lượt theo thứ tự $0, 1, \dots, L$ từ mức gốc (chỉ có một nút ứng với $f(n)$) đến mức lá (chỉ có các nút ứng với $f(1)$). Giá trị của L là?

- (A) $\log_a n$ (B) $\log_b n$ (C) b^k (D) a^k

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 043

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. ☐ C	07. ☐ B	13. ☐ A	19. ☐ C	25. ☐ A	31. ☐ C	37. ☐ B
02. ☐ D	08. ☐ A	14. ☐ A	20. ☐ D	26. ☐ D	32. ☐ A	38. ☐ D
03. ☐ C	09. ☐ C	15. ☐ D	21. ☐ B	27. ☐ C	33. ☐ D	39. ☐ C
04. ☐ B	10. ☐ B	16. ☐ C	22. ☐ B	28. ☐ B	34. ☐ B	40. ☐ B
05. ☐ C	11. ☐ A	17. ☐ C	23. ☐ A	29. ☐ A	35. ☐ B	
06. ☐ B	12. ☐ B	18. ☐ D	24. ☐ C	30. ☐ B	36. ☐ B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 044

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/8 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

☐ A $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$

☐ B $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$

☐ C $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$

☐ D $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$

Câu 02. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuấn”.

☐ A $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

☐ B $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuấn}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$

☐ C $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}) \wedge x \neq y)$

☐ D $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge P(y, \text{Tuấn}))$

Câu 03. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

☐ A $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ B $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ C $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

☐ D $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 04. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đổi xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)

Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.

☐ A Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

☐ B Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương

☐ C Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh

☐ D Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương

Câu 05. Giả sử bạn muốn chứng minh phát biểu “Với mọi số thực x , nếu $x^2 - 6x + 5 > 0$ thì $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$ ” bằng phương pháp chứng minh phản đảo. Như vậy bạn sẽ bắt đầu chứng minh của mình với giả thiết nào và điều bạn cần chứng minh là gì?

- ☒ (A) Giả thiết: $x^2 - 6x + 5 > 0$; Điều cần chứng minh: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$
- ☐ (B) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 \leq 0$
- ☐ (C) Giả thiết: $x \geq 5$ hoặc $x \leq 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$
- ☐ (D) Giả thiết: $x < 5$ và $x > 1$; Điều cần chứng minh: $x^2 - 6x + 5 > 0$

Câu 06. Với các số thực x và y , số y được gọi là *nghịch đảo cộng* (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☒ (A) $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ (B) $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ (C) $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ (D) $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 07. Với một số thực x bất kỳ, một số thực y được gọi là *nghịch đảo nhân* (multiplicative inverse) của x nếu $xy = 1$. Biểu thức nào sau đây thể hiện rằng “Mọi số thực khác không có một nghịch đảo nhân”?

- ☐ (A) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
- ☐ (B) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \forall y (xy = 1))$
- ☒ (C) $\exists x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$
- ☐ (D) $\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$

Câu 08. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ (A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
- ☐ (B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
- ☒ (C) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
- ☐ (D) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$

Câu 09. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
- ☐ (B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
- ☐ (C) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- ☐ (D) $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$

Câu 10. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x , y , và z là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất cứ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x + y + z - x*y - x*z - y*z + x*y*z ...?`

- ☒ (A) $x \oplus y \oplus z$
- ☐ (B) $x \wedge y \wedge z$
- ☐ (C) $\neg(x \wedge y \wedge z)$
- ☐ (D) $x \vee y \vee z$

Câu 11. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ (A) Cả Alice và Peter đều nói thật
- ☐ (B) Peter nói thật và Alice nói dối
- ☐ (C) Alice nói thật và Peter nói dối
- ☐ (D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 12. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☒ A Peter nói thật và Alice nói dối ☐ B Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ C Cả Alice và Peter đều nói dối ☐ D Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 13. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☒ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$ ☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$
☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$ ☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$

Câu 14. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
☐ B Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
☐ D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

Câu 15. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☒ A $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ C $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
☐ D $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Câu 16. Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số nhân này là bao nhiêu?

- ☒ A 1044 ☐ B 1210 ☐ C 500 ☐ D 484

Câu 17. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- ☒ A 31 ☐ B 28 ☐ C 37 ☐ D 32

Câu 18. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- ☒ A 101 ☐ B 103 ☐ C 100 ☐ D 102

Câu 19. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}\}$$

- (A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) 4

Câu 20. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- (A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1

Câu 21. Tính giá trị của biểu thức:

$$\sum_{i=1}^{50} i(i+1)$$

- (A) 42525 (B) 43800 (C) 44200 (D) 43750

Câu 22. Cho quan hệ $f \subseteq A \times B$ định nghĩa bởi $f = \{(n, \sqrt{|n|}) \mid n \in A \wedge \sqrt{|n|} \in B\}$ trong đó A, B là các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Trong các trường hợp nào sau đây thì f là một hàm từ A đến B ?

- (A) $A = B = \mathbb{R}$ (B) $A = B = \mathbb{N}$ (C) $A = B = \mathbb{Q}$ (D) $A = B = \mathbb{Z}$

Câu 23. Có bao nhiêu tập hợp khác nhau được liệt kê dưới đây?

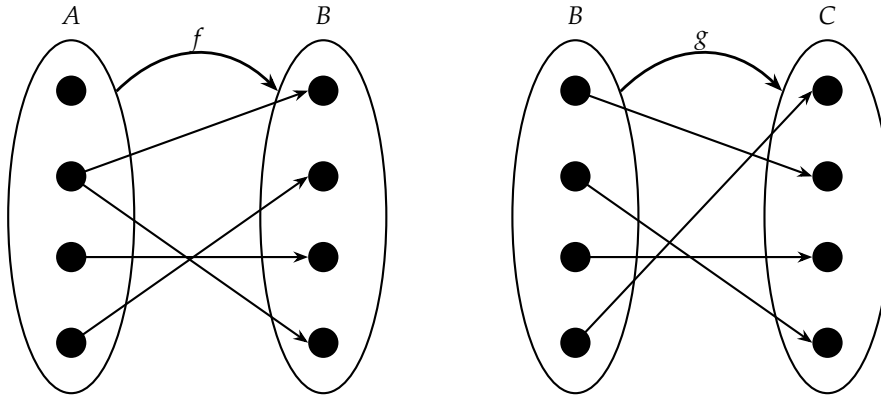
$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}$$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 1

Câu 24. Biểu thức nào là sai?

- (A) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (B) $\emptyset \in \emptyset$ (C) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (D) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

Câu 25. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- (A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh (B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
(C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh (D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 26. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-3} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 2, a_2 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_6 là bao nhiêu?

- (A) 832 (B) 340 (C) 468 (D) 398

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 2, a_2 = 6 \end{cases}$$

Công thức nào sau đây là công thức tường minh cho các số hạng của dãy $\{a_n\}$?

- (A) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 2$) (B) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 2$) (C) $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \geq 1$) (D) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ ($n \geq 1$)

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n + 1 = n + 2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k + 1 = k + 2$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k + 1 = k + 2$, ta có $k + 2 = k + 3$. Do đó, $P(k + 1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- (A) Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
 (B) Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
 (C) Không có gì sai trong chứng minh này
 (D) Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 29. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 (B) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 (C) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
 (D) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k + 1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k - 1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (5)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (6)$$

$$= 0. \quad (7)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
 (B) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
 (C) Chứng minh này sai vì đẳng thức (5) ở bước quy nạp không chính xác
 (D) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai

Câu 31. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- ☐ **A** Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 2 \cdot 3^n$
☐ **B** Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 5 \cdot 2^n$
☐ **C** Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq 4^n$
☐ **D** Với mọi số nguyên dương n , $a_n \leq n$

Câu 32. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (8)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (8), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (9)$$

Theo giả thiết quy nạp, (9) đúng, và do đó (8) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ ” đúng.

- ☐ **A** Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng
☐ **B** Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
☐ **C** Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
☐ **D** Không có gì sai trong chứng minh này

Câu 33. Phương án nào sau đây không thể sử dụng để chứng minh rằng một phát biểu $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n ?

- ☐ **A** Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
☐ **B** Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+2)$ đúng với mọi số nguyên $k \geq 0$
☐ **C** Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, ta chứng minh $P(k) \rightarrow P(k+1)$ đúng với mọi số nguyên $k > 0$
☐ **D** Đầu tiên ta chứng minh $P(0)$ đúng. Tiếp đó, giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng

Câu 34. Tập hợp S có chứa các chuỗi nhị phân được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** Chuỗi rỗng $\lambda \in S$. (Chuỗi rỗng là một chuỗi không chứa bất kỳ ký tự nào)
- **Bước đệ quy:** Nếu chuỗi nhị phân $\omega \in S$ thì các chuỗi $10\omega \in S$ và $01\omega \in S$

Sau bước cơ sở và một lần áp dụng bước đệ quy, các chuỗi nhị phân nào sau đây chắc chắn thuộc S ?

(A) 01

(B) 0

(C) 1

(D) 0101

Câu 35. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- (A) Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- (B) Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- (C) Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng
- (D) Con ngựa cuối cùng có màu trắng

Câu 36. Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O -lớn của hàm tiếp theo.

$$(1.5)^n, n^{100}, (n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), 10^n, (n!)^2, n^{99} + n^{98}$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, 10^n, (1.5)^n, (n!)^2$
- (B) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
- (C) $\sqrt{n} \log(n^2), (n \log n)^3, n^{100}, n^{99} + n^{98}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$
- (D) $(n \log n)^3, \sqrt{n} \log(n^2), n^{99} + n^{98}, n^{100}, (1.5)^n, 10^n, (n!)^2$

Câu 37. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- (A) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ không là $O(f(x)/2)$
- (B) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $g(x)$ là $O(f(x)/2)$
- (C) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ không là $O(g(x)/2)$
- (D) Nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ thì $f(x)$ là $O(g(x)/2)$

Câu 38. Cho hệ thức truy hồi có dạng $f(n) = 12f(n/12) + 10n$. Theo *Định lý thợ (Master Theorem)* thì đánh giá nào sau đây là chính xác nhất?

- (A) $f(n) = O(n \log n)$
- (B) Không áp dụng được Định lý thợ với hệ thức đã cho
- (C) $f(n) = O(-10n/11)$
- (D) $f(n) = O(n)$

Câu 39. Sắp xếp các tập hợp sau sao cho mỗi tập là tập con của tập tiếp theo.

$$O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(3^n), O(n^2 \log n), O(\log(n) - \log \log(n))$$

Hãy chọn đáp án đúng.

- (A) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 \log n), O(n^2 + \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- (B) $O(7), O(\log(n) - \log \log(n)), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- (C) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O((\log n)^n), O(3^n)$
- (D) $O(7), O(\sqrt{2^{\log \log n}}), O(\log(n) - \log \log(n)), O(n^2 + \log n), O(n^2 \log n), O(3^n), O((\log n)^n)$

Câu 40. Hàm nào sau đây không là $\Omega(n^2)$?

- (A) $n \log n + 3 \log \log n$
- (B) $n!$
- (C) 2^n
- (D) $n \log n + 3n^2$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 044

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. C	07. D	13. B	19. B	25. B	31. C	37. D
02. C	08. A	14. B	20. B	26. A	32. C	38. A
03. A	09. C	15. C	21. C	27. D	33. C	39. D
04. B	10. D	16. B	22. A	28. B	34. A	40. A
05. B	11. C	17. A	23. B	29. A	35. B	
06. B	12. C	18. D	24. B	30. B	36. B	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 045

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

Lưu ý: - Đề gồm 40 câu/9 trang.

- Không sử dụng tài liệu.

- Nộp phiếu trả lời trắc nghiệm. Không nộp đề thi.

- Kết quả bài thi chiếm 20% tổng điểm môn học.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 01. Một bản đồ (map) $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm n quốc gia $C_1, \dots, C_n$, cùng với mô tả về quốc gia C_i nào kề với quốc gia C_j nào, với $1 \leq i, j \leq n$. Một cách tô màu khả thi với 2 màu (feasible 2-coloring) cho bản đồ $\mathcal{M}$ là cách gán một trong hai màu cho trước cho mỗi quốc gia, sao cho không có hai quốc gia kề nhau nào có cùng màu. (Ví dụ, các ô trên bàn cờ vua có một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng.)

Cho hai màu đen và trắng. Với $1 \leq i \leq n$, gọi X_i là mệnh đề “Quốc gia C_i được tô bằng màu đen trong bản đồ $\mathcal{M}$ ”. Biểu thức nào sau đây không tương đương với mệnh đề “Tồn tại một cách tô màu khả thi với 2 màu đen và trắng cho bản đồ $\mathcal{M}$ ”?

(Chú ý: Trong Toán rời rạc, $\mathcal{M}$ có thể được biểu diễn bằng một đồ thị (graph) và một cách tô màu khả thi cho $\mathcal{M}$ tương đương với việc tìm một cách tô màu (coloring) cho đồ thị đó sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào có cùng màu. Tuy nhiên, câu hỏi này không yêu cầu kiến thức về đồ thị.)

- ☐ A $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee X_j) \wedge (\neg X_i \vee \neg X_j)$ ☐ B $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \rightarrow \neg X_j) \wedge (\neg X_i \rightarrow X_j)$
- ☐ C $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \vee \neg X_j) \wedge (\neg X_i \vee X_j)$ ☐ D $\bigwedge_{(i,j): C_i \text{ và } C_j \text{ kề nhau}} (X_i \wedge \neg X_j) \vee (\neg X_i \wedge X_j)$

Câu 02. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
- ☐ B Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
- ☐ C $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- ☐ D $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

Câu 03. Với các số thực x và y , số y được gọi là nghịch đảo cộng (additive inverse) của x nếu $x + y = 0$. Giả sử bạn muốn chứng minh rằng “mọi số thực có nghịch đảo cộng”. Trong trường hợp này, những lượng từ nào cho x và y cần được hiểu ngầm ở đây?

- ☐ A $\exists x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ B $\exists x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ C $\forall x \exists y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$
- ☐ D $\forall x \forall y$, trong đó x và y xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$

Câu 04. Giả sử bạn muốn chứng minh mệnh đề sau:

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu n là một số nguyên không âm thì $n \leq n^3$.”

Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh trực tiếp
- ☐ B Mệnh đề đã cho là sai bởi vì tồn tại một phản ví dụ cho mệnh đề đó
- ☐ C Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh mệnh đề phản đảo
- ☐ D Mệnh đề đã cho là đúng và có thể được chứng minh dễ nhất bằng cách chứng minh phản chứng

Câu 05. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả $0 == \text{False}$ và $1 == \text{True}$ đều có giá trị True. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác False (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là True khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện X.

Giả sử x và y là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 (hoặc bất kỳ thứ gì khác 0) và 0.

Biểu thức logic mệnh đề nào tương đương với điều kiện trong cú pháp `if x*y + (1-x)*(1-y) ...?`

- Ⓐ $x \wedge y$ Ⓑ $x \leftrightarrow y$ Ⓒ $x \vee y$ Ⓓ $x \oplus y$

Câu 06. Cho p, q , và r là các mệnh đề sau:

$p = \text{"Tàu đến muộn."}$
 $q = \text{"Giám đốc đến đúng giờ."}$
 $r = \text{"Tuần đến công ty trước giám đốc."}$

Hãy chọn biểu thức logic mô tả mệnh đề phức hợp sau:

“Nếu tàu đến đúng giờ hoặc giám đốc đến muộn thì Tuần đến công ty trước giám đốc.”

- Ⓐ $(p \wedge q) \rightarrow q$ Ⓑ $(p \wedge q) \vee q$ Ⓒ $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ Ⓓ $r \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Câu 07. Giả sử các biến trong mệnh đề đều xác định trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây thể hiện rằng “với hai số bất kỳ, nếu số thứ nhất là một số dương và số thứ hai lớn hơn số thứ nhất, thì số thứ hai cũng là một số dương”?

- Ⓐ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow (n > 0))$ Ⓑ $\forall m \forall n (((m > 0) \wedge (n > m)) \rightarrow (n > 0))$
 Ⓒ $\forall m \forall n ((m > 0) \wedge (n > m))$ Ⓓ $\forall m \exists n ((m > 0) \rightarrow ((n > 0) \wedge (n > m)))$

Câu 08. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuần là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có ít nhất hai sinh viên là bạn của Tuần”.

- Ⓐ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 Ⓑ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge x \neq y)$
 Ⓒ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}) \wedge \forall z (P(z, \text{Tuần}) \rightarrow (z = y \vee z = x)))$
 Ⓓ $\exists x \exists y (P(x, \text{Tuần}) \wedge P(y, \text{Tuần}))$

Câu 09. Nếu như bạn muốn chứng minh mệnh đề

“Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $n + 3$ là số nguyên lẻ thì $n + 4$ là số nguyên chẵn”

bằng cách chứng minh trực tiếp thì bạn sẽ cần giả thiết điều gì trong chứng minh của bạn?

- Ⓐ $n + 3 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ Ⓑ $n + 3 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$
 Ⓒ $n + 4 = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ Ⓓ $n + 4 = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 10. Sau đây là một chứng minh trực tiếp cho mệnh đề “ $1 = 2$ ”. Hãy chọn nhận xét đúng về chứng minh này.

$1 = 2$	(Điều phải chứng minh)	(1)
$\Leftrightarrow 2 = 1$	(Đối xứng)	(2)
$\Leftrightarrow 1 + 2 = 2 + 1$	(Cộng theo vế (1) và (2))	(3)
$\Leftrightarrow 3 = 3.$		(4)
Do (4) đúng, nên (1) cũng đúng.		

- ☐ (A) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (3) và (4) là tương đương
☐ (B) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (2) và (3) là tương đương
☐ (C) Chứng minh này là sai vì không thể bắt đầu từ điều phải chứng minh
☐ (D) Chứng minh này là sai vì không thể lý luận rằng (1) và (2) là tương đương

Câu 11. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Ít nhất một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ (A) Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ (B) Peter nói thật và Alice nói dối
☐ (C) Alice nói thật và Peter nói dối
☐ (D) Cả Alice và Peter đều nói dối

Câu 12. Giả sử miền xác định của các biến là tập hợp tất cả mọi sinh viên trong lớp. Tuấn là một sinh viên trong lớp. Giả sử $P(x, y)$ là vị từ “ x là bạn của y ”. Hãy chọn biểu thức tương đương với mệnh đề “Có chính xác một sinh viên là bạn của Tuấn”.

- ☐ (A) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \rightarrow ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$
☐ (B) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge \neg P(y, \text{Tuấn}))$
☐ (C) $\exists x P(x, \text{Tuấn})$
☐ (D) $\exists x \forall y (P(x, \text{Tuấn}) \wedge ((y \neq x) \rightarrow \neg P(y, \text{Tuấn})))$

Câu 13. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$. Phát biểu nào sau đây là sai?

- ☐ (A) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ (B) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$
☐ (C) $(\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \mathbf{T}$
☐ (D) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\equiv (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x))$

Câu 14. Ở một hòn đảo trong truyện cổ tích, mỗi cư dân trên đảo hoặc là luôn nói thật hoặc là luôn nói dối. Alice và Peter là hai cư dân sống trên đảo.

- Alice nói: “Chính xác một trong hai người chúng tôi luôn nói dối.”
- Peter nói: “Alice luôn nói thật.”

Ai luôn nói thật và ai luôn nói dối?

- ☐ (A) Cả Alice và Peter đều nói dối
☐ (B) Cả Alice và Peter đều nói thật
☐ (C) Peter nói thật và Alice nói dối
☐ (D) Alice nói thật và Peter nói dối

Câu 15. Giả sử biến x xác định trên miền $\mathcal{D}$ nào đó. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ (A) $\forall x (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \equiv \forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)$
☐ (B) Không có phát biểu nào trong ba phát biểu còn lại là đúng
☐ (C) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
☐ (D) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Câu 16. Tập hợp $S = \mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x^{2024} - 4x^{2022} + 2x^2 - 8 \leq 0\}$ có bao nhiêu tập con thực sự?

- ☐ (A) 28
☐ (B) 37
☐ (C) 32
☐ (D) 31

Câu 17. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_1 = 5$ và $a_{10} = 32$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ (A) 165
☐ (B) 185
☐ (C) 195
☐ (D) 170

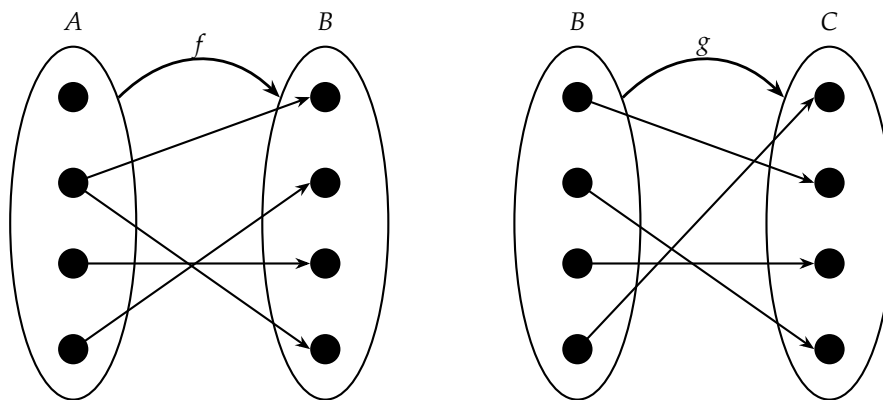
Câu 18. Cho các quan hệ $f \subseteq A \times B$ và $g \subseteq B \times C$ định nghĩa như trong Hình 1.

Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu dưới đây.

- ☐ (A) $g \circ f$ là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
☐ (B) $g \circ f$ không là toàn ánh và không là đơn ánh
☐ (C) $g \circ f$ là đơn ánh và là toàn ánh
☐ (D) $g \circ f$ là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

Câu 19. Cho $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } x \text{ chẵn}\}$ và $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ và } -4 < x < 17\}$. Hãy chọn phát biểu đúng về các tập hợp A và B trong số các phát biểu sau.

- ☐ (A) $A \subset A$
☐ (B) A là tập hữu hạn
☐ (C) $B \subseteq A$
☐ (D) Cả ba phát biểu khác đều sai



Hình 1: Các quan hệ f và g .

Câu 20. Biểu thức nào là sai?

- ☐ A $\emptyset \in \{\emptyset\}$
☐ B $\emptyset \in \emptyset$
☐ C $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
☐ D $\emptyset \subseteq \emptyset$

Câu 21. Giá trị của biểu thức sau là?

$$\sum_{n=0}^{100} \prod_{k=n}^2 k$$

- ☐ A 103
 ☐ B 100
 ☐ C 101
 ☐ D 102

Câu 22. Dãy $a_n = 5, 8, 13, 20, 29, 40, 53, \dots$ ($n \geq 1$) thỏa mãn hệ thức truy hồi nào trong số các hệ thức sau?

- ☐ A $a_n = a_{n-1} + n, a_1 = 5$
☐ B $a_n = a_{n-1} + n^2, a_1 = 5$
☐ C $a_n = a_{n-1} + 3n, a_1 = 5$
☐ D $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, a_1 = 5$

Câu 23. Cấp số cộng $\{a_n\}$ có $a_3 = 7$ và $a_8 = 17$. Công sai của cấp số cộng này là bao nhiêu?

- ☐ A 2
 ☐ B 3
 ☐ C 4
 ☐ D 1

Câu 24. Nhắc lại rằng với tập A bất kỳ, tập lũy thừa (power set) của A , ký hiệu $\mathcal{P}(A)$, là tập hợp tất cả các tập con của A . Cho các tập hợp A, B bất kỳ. Chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau.

- ☐ A $\mathcal{P}(A \setminus B) \subseteq \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$
☐ B $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$
☐ C $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \setminus B)$
☐ D $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$

Câu 25. Cho các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn tính chất sau: nếu $x < y$ thì $f(x) < f(y)$ (nghĩa là, f là hàm thực sự tăng). Phát biểu nào sau đây là đúng?

- ☐ A f là đơn ánh và đồng thời là toàn ánh
 ☐ B f không nhất thiết là đơn ánh nhưng phải là toàn ánh
 ☐ C f là đơn ánh nhưng không nhất thiết là toàn ánh
 ☐ D f không nhất thiết là đơn ánh và không nhất thiết là toàn ánh

Câu 26. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề “Với mọi số tự nhiên n , $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ ” bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với mọi số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (5)$$

$$= 2^{k+2} - 1. \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (6)$$

Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- ☐ A Chứng minh này là sai vì đẳng thức (5) không chính xác
- ☐ B Chứng minh này là sai vì giả thiết quy nạp không chính xác
- ☐ C Không có gì sai trong chứng minh này
- ☐ D Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 27. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 16 \end{cases}$$

Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về giá trị của a_n .

- ☐ A Với mọi số nguyên dương $n, a_n \leq n$
- ☐ B Với mọi số nguyên dương $n, a_n \leq 2 \cdot 3^n$
- ☐ C Với mọi số nguyên dương $n, a_n \leq 5 \cdot 2^n$
- ☐ D Với mọi số nguyên dương $n, a_n \leq 4^n$

Câu 28. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau của mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$ " bằng quy nạp.

Gọi $P(n)$ là phát biểu $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$. Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(0)$ đúng. Thật vậy, khi $n = 0$, ta có $\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1$ và $2^{0+1} - 1 = 1$. Do đó, $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số tự nhiên $k \in \mathbb{N}$ nào đó, nghĩa là $2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$. Thật vậy, ta có:

$$2^0 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1 \quad (7)$$

Thêm -2^{k+1} vào cả hai vế của (7), ta có

$$2^0 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1. \quad (8)$$

Theo giả thiết quy nạp, (8) đúng, và do đó (7) cũng đúng. Vậy $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- Ⓐ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp phải giả thiết $P(k)$ đúng với số nguyên $k > 0$ nào đó
- Ⓑ Chứng minh này là sai vì ở bước quy nạp không thể xuất phát từ $P(k+1)$ và đi chứng minh $P(k)$
- Ⓒ Không có gì sai trong chứng minh này
- Ⓓ Chứng minh này là sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh $P(1)$ đúng

Câu 29. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} & (n > 2) \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

Giá trị của a_{2025} là bao nhiêu?

- Ⓐ -6071
- Ⓑ 6067
- Ⓒ -6067
- Ⓓ 6071

Câu 30. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh sau.

Cho $P(n)$ là phát biểu " $n+1 = n+2$ ". Ta chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n . Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên không âm k nào đó, nghĩa là $k+1 = k+2$. Ta chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng. Thật vậy, thêm 1 vào hai vế của đẳng thức $k+1 = k+2$, ta có $k+2 = k+3$. Do đó, $P(k+1)$ đúng. Theo nguyên lý quy nạp, $P(n)$ đúng với mọi số nguyên không âm n .

- Ⓐ Chứng minh này sai bởi vì không có trường hợp cơ sở
- Ⓑ Chứng minh này sai bởi vì ta không thể thêm 1 vào cả hai vế của đẳng thức trong bước quy nạp
- Ⓒ Không có gì sai trong chứng minh này
- Ⓓ Chứng minh này sai bởi vì phát biểu sử dụng trong giả thiết quy nạp là sai

Câu 31. Giả sử tôi đã thấy một cuộc diễu hành của 100 con ngựa và mỗi khi tôi thấy một con ngựa màu trắng, con ngựa tiếp theo và con ngựa trước đó cũng có màu trắng. Bạn cần *thông tin bổ sung tối thiểu* nào để có thể suy ra rằng tất cả các con ngựa đều có màu trắng?

- Ⓐ Con ngựa đầu tiên có màu trắng
- Ⓑ Con ngựa cuối cùng có màu trắng
- Ⓒ Ít nhất một con ngựa có màu trắng
- Ⓓ Cả hai con ngựa đầu tiên và cuối cùng có màu trắng

Câu 32. Các số hạng của dãy $\{a_n\}$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

$$\begin{cases} a_n = \max\{a_{n-2} + a_{n-3}, a_{n-1}\} & (n > 3) \\ a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 4 \end{cases}$$

Giá trị của a_7 là bao nhiêu?

- Ⓐ 10
- Ⓑ 11
- Ⓒ 7
- Ⓓ 8

Câu 33. Hãy chọn phát biểu đúng về chứng minh bằng quy nạp mạnh của mệnh đề "Với mọi số tự nhiên n , ta có $5n - 5 = 0$ " dưới đây.

Gọi $P(n)$ là phát biểu " $5n - 5 = 0$ ". Ta chứng minh " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " bằng quy nạp mạnh.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, $5 \cdot 1 - 5 = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi $j \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng. Thật vậy, ta có:

$$5(k+1) - 5 = 2(5k - 5) - (5(k-1) - 5) \quad (\text{Biến đổi đại số}) \quad (9)$$

$$= 2(0) - 0 \quad (\text{Giả thiết quy nạp}) \quad (10)$$

$$= 0. \quad (11)$$

Do đó, theo nguyên lý quy nạp mạnh, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N} P(n)$ " đúng.

- (A) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(0)$ và $P(1)$ đúng, nhưng $P(0)$ lại là mệnh đề sai
- (B) Chứng minh này sai vì ở bước cơ sở phải chứng minh cả $P(1)$ và $P(2)$ đúng, nhưng $P(2)$ lại là mệnh đề sai
- (C) Chứng minh này sai vì đẳng thức (9) ở bước quy nạp không chính xác
- (D) Chứng minh này sai vì giả thiết quy nạp không chính xác

Câu 34. Hãy chọn phát biểu đúng trong số các phát biểu sau về Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt" (Well-ordering principle).

- (A) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (B) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 1 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (C) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất
- (D) Theo Tiên đề "Tính chất sắp thứ tự tốt", tập $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 = 4k + 2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ nào đó}\}$ có phần tử nhỏ nhất

Câu 35. Giả sử bạn sử dụng quy nạp mạnh để chứng minh " $\forall n \geq 4 P(n)$ ". Ở bước cơ sở, bạn chứng minh $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, và $P(8)$ đều đúng. Hãy chọn phương án đúng để hoàn thành phát biểu sau về giả thiết quy nạp và điều cần chứng minh trong bước quy nạp bằng cách thay các ký tự $\diamond$ và $\blacklozenge$ bằng các biểu thức phù hợp.

"Giả sử với số nguyên $k \geq \diamond$ nào đó, $P(j)$ đúng với mọi j thỏa mãn $4 \leq j \leq k$. Ta chứng minh $\blacklozenge$ đúng."

- (A) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$
- (B) $\diamond$ là 4, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$
- (C) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(j+1)$
- (D) $\diamond$ là 8, $\blacklozenge$ là $P(k+1)$

Câu 36. Dãy Fibonacci $\{f_\ell\}$ là dãy được định nghĩa một cách đệ quy như sau: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_\ell = f_{\ell-1} + f_{\ell-2}$ ($\ell \geq 2$). Ta cũng gọi f_ℓ là số Fibonacci thứ ℓ ($\ell \geq 0$).

Ta xét phiên bản FIBMERGESORT sau của thuật toán MERGESORT để sắp xếp một dãy $A[1 \dots n]$ có độ dài $n = f_\ell$ với $\ell \geq 0$ nào đó. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán FIBMERGESORT là?

```

FIBMERGESORT( $A[1 \dots n]$ ):
     $\langle\langle$  Sắp xếp trộn dãy  $A[1 \dots n]$ , với  $n = f_\ell \rangle\rangle$ 
    if  $n > 1$ 
         $m := f_{\ell-1}$   $\langle\langle$  Tách thành hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
        FIBMERGESORT( $A[1 \dots m]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
        FIBMERGESORT( $A[m+1 \dots n]$ )  $\langle\langle$  Đệ quy  $\rangle\rangle$ 
        MERGE( $A[1 \dots n]$ ,  $m$ )  $\langle\langle$  Trộn hai mảng con  $\rangle\rangle$ 
    
```

```

MERGE( $A[1 \dots n]$ ,  $m$ ):
     $\langle\langle$  Trộn hai mảng  $A[1 \dots m]$  và  $A[m+1 \dots n]$   $\rangle\rangle$ 
     $i := 1$ ;  $j := m+1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
        if  $j > n$  then
             $B[k] := A[i]$ ;  $i := i+1$ 
        else if  $i > m$  then
             $B[k] := A[j]$ ;  $j := j+1$ 
        else if  $A[i] < A[j]$  then
             $B[k] := A[i]$ ;  $i := i+1$ 
        else
             $B[k] := A[j]$ ;  $j := j+1$ 
    for  $k := 1$  to  $n$  do
         $A[k] := B[k]$ 
    
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ A $O(f_\ell \log \ell)$ ☐ B $O(\ell \log \ell)$ ☐ C $O(\ell f_\ell)$ ☐ D $O(\ell^2)$

Câu 37. Chọn hàm có độ tăng (theo ký hiệu O -lớn) chậm nhất trong số các hàm sau.

- ☐ A $f(n) = n^2$ ☐ B $f(n) = 7n$ ☐ C $f(n) = \log n$ ☐ D $f(n) = n \log n$

Câu 38. Giả sử $m \geq 2$ và $n \geq 1$ là hai số nguyên. Thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã sau là?

```
a := 0
b := 0
for i := 1 to n do
  a := a + 1
for j := 2 to m do
  b := b + 2
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể.

- ☐ A $O(m \cdot n)$ ☐ B $O(m)$ ☐ C $O(n)$ ☐ D $O(m + n)$

Câu 39. Đoạn giả mã sau có đầu vào là một dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ gồm n số nguyên và một số nguyên x .

```
for i := 1 to 10 do
  if  $a_i < x$  then
    return True
return False
```

Hãy chọn đánh giá tốt nhất có thể về thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của đoạn giả mã trên.

- ☐ A $O(n^2)$ ☐ B $O(n)$ ☐ C $O(1)$ ☐ D $O(n^3)$

Câu 40. Cho các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Giả sử $g(x) \neq 0$ với x đủ lớn. (Nghĩa là, tồn tại $x_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $g(x) \neq 0$ với mọi $x \geq x_0$.) Nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ thì kết luận nào sau đây là đúng?

- ☐ A $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ ☐ B $g(x)$ là $O(f(x))$ ☐ C $f(x)$ là $o(g(x))$ ☐ D $f(x)$ là $O(g(x))$

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 045

Thời gian: 50 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

01. C	07. B	13. A	19. D	24. D	30. A	36. C
02. C	08. B	14. A	20. B	25. C	31. C	37. C
03. C	09. A	15. C	21. D	26. B	32. B	38. D
04. A	10. B	16. D	22. D	27. D	33. A	39. C
05. B	11. C	17. B	23. A	28. B	34. A	40. B
06. C	12. D	18. B		29. A	35. D	

....., ngày ... tháng ... năm ...

Người làm đáp án

Hoàng Anh Đức